Fajszi Bulcsú

1. Adott egy szabályos ABC háromszög. Határozzuk meg azon X pontok mértani helyét, melyekre teljesül, hogy

$$AX^2 + BX^2 = CX^2.$$

2. Adott egy szabályos n-szögünk, és köré írható körének sugara R. Az n-szög egyik csúcsát összekötjük az összes többivel.

   Mekkora az így kapott szakaszok (a kiválasztott csúcsot a többivel összekötő szakaszok) hosszának a szorzata?

3. Van 25 versenylovunk. Egy futam során kiválasztunk 5 lovat, és őket versenyeztetjük a lóversenypályán. Minden futam után megtudjuk az 5 ló sorrendjét (milyen sorrendben futottak be a célba), de semmi más információt nem kapunk. Adott ló a pályát mindig ugyanannyi idő alatt futja le.

   Legalább hány futamot kell rendeznünk, hogy egyértelműen meg tudjuk határozni az első, a második és a harmadik leggyorsabb lovat?

4. Adott egy A szám, melynek értéke

$$A = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - ... + 1/605 - 1/606 + 1/607.$$

   Bizonyítsuk be, hogy A-t tört alakban felírva a számláló osztható lesz 911-el.

5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész számhoz található a számnak olyan, a szám négyzeténél nem nagyobb (és nem nulla) többszöröse, amelynek 10-es számrendszerbeli alakjában nem szerepel mind a tíz számjegy.

6. Bizonyítsuk be, hogy tudunk találni a síkban bármilyen $n > 2$-re (n egész) n pontot, melyek közül

   1) nincs 3 vagy több egy egyenesen

   2) bármely kettő távolsága irracionális

   3) bármely három által meghatározott háromszög területe racionális!

7. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül (bármilyen x valós szám esetén):

$$f(f(x)) = x^2 - 1$$

Fejes Eszter

1. András és Béla a következő játékot játszák: András véletlenszerűen kiválaszt a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben egy tetszőleges rácspontot, és egy tetszőleges vektort (amivel az adott pontot eltolva újabb rácspontot kapnánk). Ezután Béla tippel az egyik pontra, és ha az volt a kiválasztott pont, nyert. Ezután András eltolja a pontot a kiválasztott vektorral, és Béla csak ez után tippelhet újra. András minden kör elején az adott vektorral tolja el a pontot, és Bélának a pont aktuális helyzetét kell eltalálnia. Lehet-e Bélának nyerő stratégiája? Ha igen, hogyan?

2. Alice korábbi Tükörországi kalandjai során elég furcsának és értermetlennek találta a tükörországiakat. Az egyik látszólag teljesen logikailag lehetetlen kalandja után beszámol a kételyeiről barátjának, Dingidunginak. Ő elmondja, hogy Alice csak azért nem érti a korábban történteket, mert nem érti Tükörország logikáját. Bár nem hajlandó ebbe beleavatni, de elvállalja, hogy rávezeti.

   Tükörország logikájának öt szabálya van:

   Első szabály - Tükörország logikusai teljesen őszinték. Olyan, és csak olyan dolgokat állítanak, amit el is hisznek.
   Második szabály - Ha Tükörország logikusa állít valamit, azt is állítja, hogy nemhiszi e az állítást.
   Harmadik szabály - A logikus minden igaz állításról azt állítja, hogy elhiszi.
   Negyedik szabály - Ha a logikus elhisz valamit, akkor nem hiheti el az ellentétét is.
   Ötödik szabály - Bármilyen állításra igaz, hogy a logikus vagy elhiszi az állítást, vagy elhiszi annak az ellentétét.

   Válaszolj ezek alapján a következő kérdésekre:

   a, Tegyük fel, hogy a logikus azt hiszi, hogy a Fekete Király vagy a Fekete Királynő alszik. Következik ebből, hogy azt hiszi, hogy a Fekete Királynő alszik?

   b, Tegyük fel, hogy a logikus azt hiszi, hogy a Fekete Király alszik. Következik ebből, hogy azt hiszi, hogy a Fekete Király és a Fekete Királynő is alszik?

   c, Tegyük fel, hogy azt hiszi, hogy minden griffnek van szárnya. Következik ebből, hogy léteznek griffek?

3. Aranka és Bianka egy 2008×2008-as sakktáblán a következő játékot játszák. Aranka gondolatban kiválasztja a tábla néhány mezőjét. Ezután minden mezőre ráírja, hogy az és a vele éllel vagy csúccsal érintkező mezők közül összesen hány szerepel a kiválasztottak között. Meg tudja-e határozni ennek alapján Bianka, hogy mely mezőket választotta ki Aranka?

4. Van egy zsebrádiónk, amely két ceruzaelemmel működik. A fiókban van 8 ceruzaelemünk, közülük 4 ki van merülve. A jó és rossz elemek sajnos összekeveredtek. Az elemek tesztelésére nincs más lehetőségünk, mint hogy belehelyezünk kettőt a készülékbe, és ha az szól, akkor mindkét elem jó, ha nem szól, akkor legalább az egyik rossz.

   Legalább hány kísérletre van szükség ahhoz, hogy biztosan megszólaljon a rádió?

5. Adottak az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és P általános helyzetű pontok a síkon. Jelölje k_i azt a számot, ahányféleképpen az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontok közül kiválasztható i darab úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burka tartalmazza P-t. Mutassuk meg, hogy $k_3 = k_4$.

6. A négyzet alakú medencében úszkáló Jerry el szeretne menekülni a parton rá leső Tom elől. Tom nem tud úszni, lassabban fut, mint Jerry, viszont négyszer olyan gyorsan fut, mint ahogy Jerry úszik. Megmenekülhet-e mindig Jerry?

7. Egy konvex poliédernek minden lapja négyszög. Mutassuk meg, hogy a poliéder lapjait háromszögekre bonthatjuk egy-egy átló meghúzásával úgy, hogy a poliéder minden csúcsánál páros számú háromszög találkozzon.

Jedlovszky Pál

1. Legyen az a_N sorozat k-adik tagja $a_k = k$, ha $k = 1, 2, ..., 2006$, és $a_{k+1} = a_k + a_{k-2005}$ ha $k > 2006$. Lássuk be, hogy a sorozatnak van 2005 egymást követő tagja, melyek oszthatók 2006-tal.

2. 11 egész számról tudjuk, hogy bárhogyan is hagyunk el közülük egyet, a megmaradó 10 szám két, egyenként 5 elemű csoportra osztható úgy, hogy a csoportokban levő számok összege egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a 11 szám egyenlő.

3. Legyen $N = \{1, 2, ..., n\}$. Legyen N-nek egy adott f permutációjára $d(f)$ azon i-k száma, amire $f(i) > f(j)$ minden $j > i$-re. Ha választunk egy f permutációt véletlenszerűen, mennyi $d(f)$ várható értéke?

4. Bizonyítsa be, hogy ugyanannyi módon lehet n-et felbontani egyesek és kettesek rendezett összegére, ahány módon $n + 2$-t 1-nél nagyobb számok rendezett összegére! (Például: $4 = 1 + 1 + 1 + 1+ = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$ (5-féleképp); $6 = 6 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 2 + 2 + 2$ (5-féleképp)).

5. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül, hogy $f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$.

6. Két pozitív a, b egész számot közelinek nevezünk, ha vagy $a = pb$ vagy $b = pa$, ahol p prím. Mely n összetett számoknak lehet felírni egy kör kerületére az összes pozitív osztóját úgy, hogy bármely két szomszédos osztó közeli legyen?

7. Lássuk be, hogy minden n-hez létezik olyan n számjegyű szám, amely osztahtó 5^n-nel, és minden számjegye páratlan.

Martinák Zalán

1. Legyen M a valós számok olyan m elemű részhalmaza ($m > 2$), amelyben bármely elem abszolút értéke legalább akkora, mint a többi $m-1$ elem összegének abszolút értéke. Bizonyítsuk be, hogy M elemeinek összege 0.

2. Legyen G olyan egyszerű gráf, amelyben minden csúcs foka legalább 2. Mutassuk meg, hogy van G-nek olyan csúcsa, hogy minden belőle induló él benne van egy körben.

3. Legfeljebb hány nem-üres részhalmaz választható ki egy 100 elemű halmazból úgy, hogy bármely két kiválasztott részhalmaz vagy diszjunkt legyen vagy az egyik tartalmazza a másikat?

4. A valós számok közül bizonyosakat pirosra festünk, mégpedig úgy, hogy ha az x szám piros, akkor az $x+1$ és $\frac{x}{x+1}$ számokat is pirosra festjük. Mely számok lesznek pirosak, ha kezdetben csak az 1 piros?

5. Nevezzük betűk véges hosszúságú sorozatát szónak. Egy szóval a következő műveleteket végezhetjük:

   a) Elhagyjuk az első vagy az utolsó betüjét;

   b)A szót "megduplázzuk", azaz a szó két példányát egymás után írjuk.

   Eljuthatunk-e ilyen lépésekkel az $ABCD...XYZ$ szótól a $ZYX...DCBA$ szóhoz?

6. Legyen egy halmaz *egész*, ha elemeit $-1, 0$, vagy 1-el szorozva majd összeadva, bármely egész számot megkaphatjuk. Hány diszjunkt *egész* halmazra bontható az egész számok halmaza?

7. A H halmaz elemei a pozitív egész számok halmazának bizonyos részhalmazai úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a metszete véges halmaz. Következik-e ebből, hogy H megszámlálható?

Mazug Péter

1. Határozzuk meg az $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$,..., $\binom{n}{n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha p páratlan prím, akkor $\binom{2p-1}{p-1} - 1$ osztható p^2-tel!

3. Két játékos felváltva ír $+$, $-$ vagy $\cdot$ jelet 1-től 100-ig számok közé (két szám között pontosan egy jel szerepelhet). Bizonyítsuk be, hogy a végül kapott kifejezés értékének paritását az egyik játékos megfelelő játékkal eldöntheti.

4. Ha egy számológép csak összeadni, kivonni és reciprokot venni tud, illetve tetszőlegesen sok számot a memóriájában eltárolni és onnan visszahívni, akkor ha a memóriában x-szel és y-nal kezdünk, eljuthatunk-e $x \cdot y$-ig?

5. Egy szakaszon $n-1$ db pontot véletlenszerű (a szakasz mentén egyenletes eloszlással) kijelölünk, n új szakaszra darabolva azt. Mekkora az esélye, hogy az egyik keletkezett szakasz legalább feleakkora lesz, mint az eredeti?

6. Egy négyzetrácsra véges sok 1×2-es dominót rakhatunk le (a négyzetekre pontosan illeszkedve). Le lehet-e őket úgy rakni, hogy minden dominó mindkét hosszabbik oldalával érintsen egy másik dominót?

7. Adjuk meg azon egyszerű összefüggő gráfokat melyeknek akármely csúcsból elindulva - úgy hogy egy élen nem járunk többször - egy idő után minden élen jártunk, akárhogy is sétálunk.

Molnár Bálint

1. Hány olyan rendezett szám n-es van, amelyben a számok LNKO-ja 24, LKKT-ja 1440?

2. Egy sorban leteszünk egymás mellé $2n$ darab lámpát. Kezdetben egyik sem világít. Egy lépésben fel- vagy lekapcsolhatunk egy lámpát, ha az attól közvetlenül balra lévő lámpa világít, de attól balra egy sem. Szintén fel-, vagy lekapcsolhatjuk az első lámpát egy lépésben. Minimum hány lépés szükséges ahhoz, hogy az összes lámpa világítson?

3. Legyen n pozitív egész szám, a_1, $a_2, \dots,$ a_n pedig páronként különböző egész számok. Igazoljuk, hogy az $(x-a_1)(x-a_2)\dots,(x-a_n)-1$ polinom nem áll elő két legalább elsőfokú egész együtthatós polinom szorzataként.

4. Két hangya kezdetben ugyanazon az X ponton áll. Az n-edik percben pontosan q^n métert tesz meg mindkét hangya, észak, kelet, dél vagy nyugat felé. Néhány perc után a két hangya egy pontban találkozik (nem feltétlenül X-ben), úgy, hogy nem végig ugyanazon az úton mentek. Mely q pozitív racionális számokra lehetséges ez?

5. Egy tízzel nem osztható, legalább 100-jegyű szám két különböző számjegyét felcseréltük egymással, az így kapott számnak pontosan ugyanazok a prímosztói, mint az eredeti számnak (és ugyanannyi számjegyből áll). Mutassunk példát ilyen számra.

6. Legyen $n > 2$ pozitív egész. Van $\frac{n(n-1)}{2}$ kártyánk, megszámozva 1-től $\frac{n(n-1)}{2}$-ig. Két kártya mágikus párt alkot, ha a rajta lévő számok szomszédosak, illetve az 1-es és az $\frac{n(n-1)}{2}$-es is mágikus párt alkot. Mely n számokra lehet elérni, hogy a kártyákat n kupacba osszuk úgy, hogy bármely két kupacból egyféleképpen lehet 1-1-et kiválasztani úgy, hogy mágikus párt alkossanak?

7. Melyek azok az $n = p_1p_2 \dots p_k$ számok, amelyek osztják az $m = (p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)$ számot, ahol p_1, $p_2, \dots,$ p_k (nem feltétlenül különböző) prímek?

Molnár-Sáska Zsófia

1. Jancsi és Juliska egy 1000 csúcsú, összefüggő gráffal játszanak. A játék abból áll, hogy az egyikük gondol két csúcsra, a másikuknak pedig minél kevesebb kérdezésből ki kell találnia, hogy melyik volt ez a két csúcs. Egy kérdezés abból áll, hogy a kitaláló, az eredeti gráfból készít egy súlyozott gráfot, ahol az utak hossza lehet 1 vagy 2. Ekkor a gondoló pedig megmondja, hogy a legrövidebb út milyen hosszú a két csúcs között. Mutassuk meg, hogy ki lehet találni a gondolt két csúcsot 20 kérdéssel!

2. Igazoljuk, hogy, ha a, b, c páronként különböző pozitív egészek, akkor

   $$(42a+43b+43c)^3+(43a+42b+43c)^3+(43a+43b+42c)-3(42a+43b+43c)(43a+42b+43c)(43a+43b+42c)$$

   osztható 128-cal, de nem teljes 2 hatvány.

3. A nyolcjegyű számokat osszuk két halmazba. Az egyik halmazba kerüljenek azok, amelyek felbonthatók két négyjegyű szám szorzatára, a másikba azok, amelyek nem. Melyik halmazba kerül több szám?

4. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is hagyunk el az első 2002 pozitív egész szám közül 89 darabot, a megmaradó számok között van 20 olyan, amelyeknek az összege is a megmaradt számok között van.

5. Adott az R sugarú körbe írt $A_1A_2A_3...A_{2018}$ sokszög. A kör egy tetszőleges, de a csúcsoktól különböző M pontjának a sokszög csúcsaitól mért távolságait jelölje rendre d_i, $i = 1, 2, 3, ..., 2018$, míg M-nek a sokszög oldalaitól mért távolságait jelölje rendre l_i $i = 1, 2, 3, ..., 2018$, pontosabban l_1 az M távolsága az A_1A_2 oldaltól, l_2 az M távolsága az A_2A_3 oldaltól,..., l_{2018} az M távolsága az $A_{2018}A_1$ oldaltól.

   Bizonyítsa be, hogy $d_1 \cdot d_1/l_1 + d2 \cdot d_2/l_2 + ... + d_{2018} \cdot d_{2018}/l_{2018} \geq 4036R$.

6. Tekintsük az $ABCD$ olyan síkbeli húrnégyszöget, amelyben az AB oldal hossza $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, továbbá az AB oldal 135° középponti szög alatt látszik a köré írt kör középpontjából. Határozza meg az ilyen négyszögek területének maximumát!

7. Az ABC háromszög AC oldalához hozzáírt kör az AC oldalt K pontban, a BC oldal meghosszabbítását az E_1 pontban érinti, míg a BC oldalhoz hozzáírt kör a BC oldalt az L pontban, az AC oldal meghosszabbítását az E_2 pontban érinti. Bizonyítsa be, hogy az E_1KLE_2 négyszög trapéz, és a trapéz alapokkal párhuzamos középvonala felezi az AB oldalt.

Nagy Nándor

1. Adott a síkon az AB szakasz. Vegyünk fel egy tetszőleges C pontot a síkban úgy, hogy az ABC háromszög ne legyen egyenlő szárú. A C csúcshoz tartozó külső szögfelező az AB egyenest D-ben, az ADC körhöz A-ban húzott érintőt P-ben metszi. Határozzuk meg az így kapható P pontok mértani helyét.

2. Legyenek a_1,..., a_k különböző pozitív egészek. Továbbá definiáljuk a_n-t $n > k$ esetén az alábbi módon: legyen az a legkisebb pozitív egész, amely nem áll elő $a_1, ..., a_{n-1}$ halmaz semelyik részhalmazának összegeként sem. Igazoljuk, hogy alkalmas N esetén minden $M > N$-re $a_M \cdot 2 = a_{M+1}$

3. Egy adott α valós szám esetén nevezzük kézenfekvőnek azon pozitív egész q számokat, melyekre létezik p egész, hogy $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$. Igazoljuk, hogyha α és β két irracionális szám, és megegyezik a kézenfekvő halmazuk, akkor $\alpha + \beta$ vagy $\alpha - \beta$ egész szám.

4. Adjuk meg a minimális n pozitív egészt ($n > 4$), melyre létezik n személyből álló kémhálózat, melyben bármely két egymást ismerő ügynöknek nincsen közös ismerőse, azonban bármely két nem ismerőnek pontosan 2 közös ismerőse van.

5. Legyen n pozitív egész. Képezzük az a_0,..., a_k; b_0,..., b_k sorozatokat, ahol $a_0 = b_0 = 0$. $a_k = b_k = n$ és minden további elemre $(a_i, b_i) = (a_{i-1} + 1, b_{i-1})$ vagy $(a_{i-1}, b_{i-1} + 1)$. A $c_1, ..., c_n$ sorozatot pedig képezzük az alábbi módon: $c_i = a_i$, ha $a_i = a_{i-1}$, $c_i = b_i$ egyébkent. Mutassuk meg, hogy $c_1 + ... + c_k = n^2 - 1$.

6. Tükrözzünk a térben valamilyen sorrendben egy kocka mind a hat lapjának a síkjára. A hat tükrözés egymásutánja hány különböző transzformációt eredményez?

7. János és Júlia megmeneküléséhez Júliának válaszolnia kell egy eldöntendő kérdésre. A lehetséges kérdéseket 1-től 924-ig sorszámozzuk. A Boszorkány eldöntötte, hogy X vagy Y lesz a kérdés, melyre rendre igen és nem válasz adandó. Ezeket kezdetben nem ismerik, de miután Júlia elmegy aludni, János megkapja ezeket az információkat. János ezután választ egy pozitív egészt 1, ..., h-ig, melyet Júliának üzen. Júlia másnap az üzenettel garantáltan sikeresen meg tudja válaszolni a kérdést. Mi lehet h legkisebb értéke?

Sárvári Tibor

1. Legyenek n és k pozitív egész számok, az S pedig olyan n elemű síkbeli ponthalmaz, amelynek

   a, semelyik három pontja nincs egy egyenesen;

   b, az S halmaz minden P pontjához található legalább k pont, amelyek mind egyenlő távolságra vannak a P ponttól.

   Bizonyítsuk be, hogy
   $$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

2. Legyen $n \geq 3$, és tekintsünk egy E halmazt, amely egy kör kerületén lévő $2n - 1$ számú különböző pontból áll. Tegyük fel, hogy e pontok közül pontosan k számút feketére színeztünk. Egy ilyen színezést *jónak* nevezünk, ha található két olyan fekete pont, hogy az általuk meghatározott két körív legalább egyikének a belseje pontosan n számú E-beli pontot tartalmaz.

   k mely értékeire lehet*jó* színezést találni?

3. Határozzuk meg az összes a, b, c egész számot, amelyekre $1 < a < b < c$ és $(a-1)(b-1)(c-1)$ osztója $abc - 1$-nek.

4. Határozzuk meg az összes olyan egészekből álló (a, b) számpárt, ahol $a \geq 1, b \geq 1$, és teljesül rájuk, hogy
   $$a^{b^2} = b^a.$$

5. a és b pozitív egész számok, melyekre $1 + ab$ osztja $a^2 + b^2$-t. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ négyzetszám.

6. A pokémon világbajnokság döntőjében már csak három versenyző áll talpon. Egy bulbasaur, akinek minden támadása 70% eséllyel talál, valamint egy chalamander, akinek minden támadása 90% eséllyel talál célt. A forduló körökre osztott, amelyekben először mi, majd bulbasaur (B), végül chalamander (C) támadhat. Minden támadásnál célba vehetjük bármely ellenfelünket, aki még harcban van, vagy kihagyhatjuk a kört.

   Ha az első kör végéig senki sem esik ki, akkor mindenkit diszkvalifikálnak. Mi három lény közül választhatunk: magikarp, aki 60%-ban, pidgey, aki 80%-ban, valamint pikachu, aki 100%-ban talál.

   Ha mindkét ellenfelünk a legjobb stratégia szerint harcol, kit válasszunk a legjobb nyerési esélyekhez?

7. Az alábbi táblázat a Pascal-háromszög mintájára készült. Az első sor két eleme 1 és 2, ezután pedig minden újabb szám a felette álló kettő összege.

   $$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 2 & & \\ & 1 & & 3 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 5 & & 2 \end{array}$$

   a) Mit kapunk, ha a 100. sorban váltakozó előjellel adjuk össze a számokat?

   b) Mennyi a 100. sor 47-edik eleme?

Sokvári Olivér

1. Egy négyzet alakú kert fel van osztva 10×10 kisebb négyzetre, amelyek közül k db gazos. Ha egy kis négyzet két oldalszomszédja gazos, akkor ő is az lesz. Mi az a legkisebb k, amire lehet, hogy az egész kert gazos lesz?

2. Lehet-e
$$\sum_{m=k}^{n} \frac{a_m}{m}$$
egész szám, ha n, k és a_m egész számok, $n > k$, és $(a_m; m) = 1$.

3. Felvesz-e minden egynél nagyobb racionális értéket a $\frac{\sigma(n)}{n}$ számelméleti függvény? ($\sigma(n)$ az n osztóinak összege)

4. Anna és Bálint egy játékot játszanak. Az első lépésben Anna letesz egy lovat (huszárt) a 8×8-as sakktáblára. Utána Bálint kezdésével felváltva lépnek a lóval (L alakban). Az veszít, aki először nem tudja a lovat egy olyan mezőre rakni, ahol az még nem volt. Ha létezik nyerő stratégia, akkor melyik játékosnak van és mi az?

5. Bizonyítsuk be, hogy minden k-hoz létezik olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra
$$\varphi(n) > k \ ,$$
ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle φ függvény.

6. Konvergens vagy divergens-e azoknak a számoknak a reciprokösszege, melyek osztóinak a száma egy adott k egész szám ($d(n) = k$)?

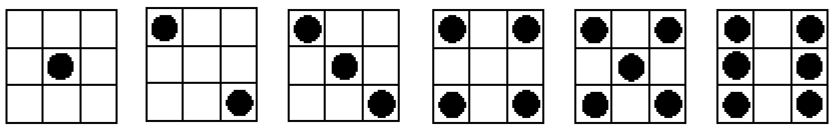
7. Ha minden t egész szám eleme az
$$a_1(\text{mod } m_1), \ldots, a_k(\text{mod } m_k), \ 1 < m_1 \leq \ldots \leq m_k$$
maradékosztályok közül legalább az egyiknek, azaz van olyan i, amelyre $t \equiv a_i(\text{mod } m_i)$, akkor a maradékosztályok ilyen rendszerét fedőrendszernek nevezzük. Maradékosztályok olyan rendszerét, melynek nem minden egész szám az eleme, részleges fedőrendszernek nevezzük. Létezik-e olyan tetszőleges ritka sorozat, amelyhez nincs olyan részleges fedőrendszer, amely lefedné? (Tetszőlegesen ritkán azt értjük, hogy bármely $b_1 < b_2 < \ldots$ sorozathoz van egy megfelelő $c_1 < c_2 < \ldots$ sorozat, ahol minden i-re $b_i < c_i$.)

Soós Máté

1. Egy $3 \times 3 \times 3$-as kockát 27 egységkockára bontunk és ezek közül néhányat beszínezünk pirosra. Hány különböző színezés létezik, ha a forgatással egybevihetőeket nem tekintjük különbözőnek?

2. A következő játékot játszuk: dobnak 4 egyforma és egy kisebb szabályos dobókockával, majd ezekből piramist építenek a következő módon: alulra kerül 2×2 kocka(így mind a négynek csak 3 oldala látszik), majd erre ráteszik az ötödiket, ami akkora, hogy mind a négy kocka felső lapjának csak a sarkát fedi le(tehát például egy ötösből csak 4 pont látszik).

   A kocka odalalai így néznek ki:

   Ezek után annyi pénz kapunk ahány pöttyöt összesen látunk. Mennyi pénzért éri meg ezt a játékot játszani?

3. Igaz-e, hogy minden irracionális számnak van olyan egész számú, nem 0 többszöröse, amelynek tizedes jegyei között végtelen sokszor szerepel a 0 és 9 számjegyek egyike?

4. Adott n pont a síkon, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy néhány pontot kiválasztva vagy csak konvex sokszögeket kaphatunk (a hurkolódókat nem számítva) vagy minden $4 \leq i \leq n$-re találunk i csúcsú konkáv sokszöget.

5. Ki lehet-e rakni hézag és átfedés nélkül 2 egység oldalú és 3 egység oldalú négyzetek felhasználásával egy 101 egység oldalú négyzetet?

6. Adott egy e egyenes és egy azon kívüli P pont. A P pontból húzunk két egymásra merőleges egyenest úgy, hogy egyik se legyen párhuzamos e-vel. A két egyenes és e metszéspontja legyen K_1 és K_2. Rajzoljuk meg a K_1 középpontú P-n átmenő és K_2 középpontú P-n átmenő köröket, majd a metszéspontokat jelöljük az ábra szerint. Legyen Q a K_2 körüli kör tetszőleges, A_2-től és B_2-től különböző pontja. Bizonyítsuk be, hogy QB_2 szögfelező az A_1B_1Q háromszögben.

7. Egy n lakosú városban klubokat szerveznek úgy, hogy bármelyik két klubnak legyen, és bármelyik háromnak már ne legyen közös tagja. Legfeljebb hány klubot lehet így szervezni?

Tardos Tamara

1. A sík egész koordinátájú pontjain egy-egy szöcske ül. Egyszerre elugranak.

   a) Előfordulhat-e, hogy minden egész koordinátájú pontra két szöcske érkezik, ha bármilyen távolra el tudnak ugrani?

   b) Előfordulhat-e, hogy minden egész koordinátájú pontra két szöcske érkezik, ha legfeljeb 100 távolságra ugornak?

   c) Van-e olyan (végtelen) gráf melynek minden foka legfeljebb 100 és a csúcsain ülő csigák egy-egy élen átcsúszva el tudják érni, hogy minden csúcson két csiga legyen?

2. A végtelen börtönben a cellák meg vannak számozva a pozitív egész számokkal. Egyes cellák között alagutat ástak a rabok. A börtönigazgató tudni szeretné, hogy hány rabot lehet fogva tartani úgy, hogy ne tudjanak átjutni egymás celláiba ha...

   a) i és $i + 10$ valamint i és $3i + 1$ között van átjárás.

   b) i és $2i + 1$ valamint i és $8i + 1$ között van átjárás.

   c) i és $2i + 1$ valamint i és $3i + 1$ között van átjárás.

3. Kartal matek szakkört indít 100 sértődékeny diáknak akik mind különböző mértékben tehetségesek. Minden nap egy diákkal tud foglalkozni. Azok a diákok akikkel még nem foglalkozott soha vagy amióta egy kevésbé tehetséges diákkal foglalkozott, meg vannak rá sértődve. Kartal minden nap a legtehetségesebb sértődött diákkal foglalkozik. Ha egy nap egy diák sem megy sértődötten haza, Kartal befejezi a szakkört.

   a) Hány napig tart a szakkör?

   b) Az i-edik diák háyszor megy a szakkörre sértődötten?

4. Kitalált falva lakóira igaz, hogy páronként vagy barátok vagy ellenségek, az ,,ellenségem ellensége a barátom" elvet betartva. Utálják a migránsokat ezért úgy döntenek, hogy a járőr párokat szerveznek, és így felügyelik a falu határát. Mindenkinek kell találni egy párt, de senki sem szeretné, hogy a párja egy ellensége legyen. Szerencsére páros sokan vannak és mindenkinek van legalább egy barátja.

   a) Mutass olyan példát, ahol nem tudják megoldani, hogy mindenki egy barátjával kerüljön párba.

   b) Mikor nem tudják megoldani, hogy mindenki egy barátjával kerüljön párba? (Adj szükséges és elégséges feltételt.)

5. A táblára felírtak egy áltörtet. Anna nem szereti az áltörteket, ha ilyet lát a táblán átírja vegyestört alakba. Hanna nem ismeri a vegyestört alakot, ha ilyet lát a táblán, azt hiszi, hogy szorzás, és felírja helyette a szorzatot . Anna és Hanna felváltva mennek oda a táblához amíg egy egész, vagy valódi tört nem lesz rajta. Pl.: $\frac{85}{6} \to 14\frac{1}{6} \to \frac{14}{6} \to 2\frac{2}{6} \to \frac{4}{6}$.

   a) Lássuk be, hogy ez a folyamat mindig véget ér.

   b) Milyen n-re eredményez valódi törtet ez a folyamat, ha $\frac{n}{2}$ az első szám?

6. Legyen k egy pozitív egész szám. Mely n pozitív egész számokra igaz, hogy az $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmazt k diszjunkt részhalmazra lehet bontani úgy, hogy a számok összege ugyanannyi legyen az összesben.

7. Legyen ABC egy egyenlőszárú háromszög, ahol $AB = AC$ és a BAC szög α. A háromszöget tükrözhetjük bármely oldalára, az új háromszöget is tükrözhetjük annak bármely oldalára és így tovább. Azt szeretnénk elérni, hogy a háromszög az eredeti háromszög súlypontjára vett tükörképébe menjen át.

   a) Lássuk be, hogy ha $\alpha = 60°$ vagy $\alpha = 90°$ vagy $\alpha = 45°$ akkor nem lehet ezt elérni.

   b) Az a) részben lévő szögek közül melyekre igaz, hogy tetszőlegesen közel vihető a háromszög a célhoz?

Tiderenczl Dániel

1. Határozzuk meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely minden valós (x, y) számpár esetén teljesíti a következő egyenletet:
$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

2. Egy társaságban $3n + 1$ tag van, ahol n pozitív egész szám. A társaság bármely két tagja vagy pingpongozik, vagy teniszezik, vagy sakkozik egymással. Minden tag mindegyik játékot pontosan n másik taggal játsza. Bizonyítsuk be, hogy van a társaságnak 3 olyan tagja, akik egymás közt mindhárom játékot játszák!

3. Az $a_1, a_2, ...$ pozitív valós számokra minden pozitív egész k mellett teljesül a következő egyenlőtlenég:
$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$
Bizonyítsuk be, hogy $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$ minden $n \geq 2$ esetén!

4. Bizonyítsuk be, hogy
$$\prod_{p \leq n} p < 4^n$$
teljesül bármely p prímre.

5. Legyenek m és n tetszőleges nemnegatív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$
egész szám.

6. Az ABC háromszög szabályos. Bizonyítsuk be, hogy ha P pont az ABC háromszög körülírt körén van, akkor a $PA^4 + PB^4 + PC^4$ összeg állandó.

7. Egy tetszés szerinti ABC háromszögre úgy szerkesztjük kifelé a BPC, CQA, ARB háromszögeket, hogy

   $PBC\angle = CAQ\angle = \beta$,

   $BCP\angle = QCA\angle = \alpha$,

   $ABR\angle = BAR\angle = |90^o - \alpha - \beta|$,

   és R az AB egyenes C-vel ellentétes oldalán helyezkedjék el, ha $\alpha + \beta < 90^o$, C-vel egyező oldalán, ha $\alpha + \beta > 90^o$ és essék egybe AB felezőpontjával, ha $\alpha + \beta = 90^o$. Bizonyítsuk be, hogy $QRP\angle = 2\beta$ és $QR = RP$.

Tóth Balázs

1. Létezik-e olyan w pozitív nem egész racionális szám, amire w^w racionális?

2. Létezik-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely minden racionális helyen irracionális értéket és minden irracionális helyen racionális értéket vesz fel?

3. Keressük meg az összes olyan $P(x)$ valós együtthatós polinomot, amelyre $P(a) \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{Z}$.

4. Adva van két egész, n és k, melyekre $n \geq k \geq 2$.

   Egy gonosz varázslónak van $2n$ kártyája, minden $1 \leq i \leq n$ egészre két kártya van, amelyre i van írva. Először a varázsló lerakja az összes kártyát számmal lefelé ismeretlen sorrendben.

   Ezután a következő lépéseket tehetjük: rámutathatunk k tetszőleges kártyára. A varázsló ekkor felfordítja ezt a k kártyát és ha van köztük 2, amelyen azonos szám van, akkor a játéknak vége és nyertünk. Egyébként elfordulunk, majd a varázsló tetszőlegesen átrendezi a k kiválasztott kártyát és számmal lefelé fordítja őket. Ezután megint mi léphetünk.

   A játékot nyerhetőnek nevezzük, ha létezik egy m pozitív egész, és valamilyen stratégia, amellyel a játékot legfeljebb m lépés után megnyerjük a varázsló játékától függetlenül.

   n és k mely értékeire nyerhető a játék?

5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re vannak páronként relatív prím, 1-nél nagyobb k_0, k_1,..., k_n egészek, melyekre $k_0 k_1 \dots k_n - 1$ két szomszédos egész szám szorzata.

6. Legyen G egy 100 csúcsú irányított teljes gráf, amelyben bármely két x, y csúcsra létezik x-ből y-ba út.

   a) Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen G-hez létezik m pozitív egész amire bármely két x, y csúcs közt van m hosszú út. (Ismétlődhetnek a csúcsok, x és y különbözőek.)

   b) Legyen $m(G)$ a legkisebb olyan m amire az a) részben leírt tulajdonság teljesül. Mi $m(G)$ minimuma a feltételeket teljesítő G gráfok közt?

7. Véges sok korongot elhelyeztünk egy végtelen hosszú, egységnégyzetekből álló soron. A következő lépéssorozatot hajtjuk végre: minden lépésben kiválasztunk egy négyzetet, amelyen több, mint egy korong van. Két korongot leveszünk erről a négyzetről, az egyiket eggyel balra, a másikat pedig eggyel jobbra helyezzük a kiválasztott négyzettől. A lépéssorozat véget ér, ha minden négyzeten legfeljebb egy korong van. Bizonyítsuk be, hogy adott kezdőállásból indulva minden lépéssorozat ugyanannyi lépés után és ugyanabban a végállásban fog véget érni.

Vámos Tamás

1. Bizonyítsuk be, hogy egy gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. (Egy gömb felszínén lévő A és B pontok gömbi összekötő egyenesének az A-t és B-t tartalmazó nem hosszabb főkörívet nevezzük.)

2. Tekintsünk egy S halmazt és a halmazon egy kétváltozós * műveletet (tehát bármely két S -beli a, b esetén $a * b$ is S-beli). Tegyük föl, hogy $(a * b) * a = b$ teljesül minden S-beli a, b -re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a * (b * a) = b$ is teljesül minden S-beli a, b-re.

3. Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a dobások számának a várható értéke?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan n^2-nél nem nagyobb, n-nel osztható pozitív egész szám, amelynek 10-es számrendszerbeli alakjában nem szerepel mind a tíz számjegy.

5. Igazoljuk, hogy ha egy körív felezi egy k kör területét, akkor hossza nagyobb k átmérőjénél.

6. Egy társaságban valakit félénknek hívunk, ha legfeljebb 3 ismerőse van. Bizonyítsuk be, hogy ha mindenkinek van legalább 3 félénk ismerőse, akkor mindenki félénk. Hányan lehetnek ekkor a társaságban?

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^n \left| \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} 3 + \cdots + \binom{2n}{2i} 3^i + \cdots + \binom{2n}{2n} 3^n. \right.$$