

A Fazekas Matektábor legérdekesebb feladatai

Dunabogdány, 2024. szept. 30. – okt. 4.

Szerkesztette: Hujter Bálint, a szerkesztés lezárult: 2025. január 22.

A speciális matematika tagozat hagyományos őszi matektáborát a 2024-25-ös tanévben szeptember 30. és október 4. között rendeztük, az előző évben már jól bevált helyszínen, a dunabogdányi JEKA üdülőben.



A táborban 25 diák vett részt, akik az alábbi csapatokba rendeződve dolgoztak:

- 260 kg
(Czirják Márton Pál, Holló Martin, Kocsis Péter, Szakács Ábel).
- Kötél
(Licsik Zsófia, Pálfi András, Prohászka Bulcsú, Ta Minh Khoa 11c)
- Mára kellett a Hamlet?
(Chen JiaTong, Dulácska Dániel, Szabó Imre Bence 11c)
- Nyugati boszorkányok
(Lakner Hanna Rozália, Sohár Bernadett, Tajta Sára 11c)
- Triumvirátus
(Sárdinecz Dóra, Veres Dorottya, Zhai You Fan 11c)
- PEKK
(Czanik Pál, Erdélyi Kata, Juhász-Molnár Erik, Kovács Benedek Noel 12c)
- Rubik-kockák
(Csilling Dániel, Haskó Emma, Nguyen Kim Dorka, Petrányi Lilla 12c)

A tábori munkát Hujter Bálint és Lenger Dániel matematikatanárok vezették, és nagy segítségükre volt Kovács Tamás öregdiákunk is (2022c, a Cambridge University harmadéves matematikus hallgatója). Egy délután erejéig vendégünk volt Simon László (2024c, a Cambridge

University elsőéves matematikus hallgatója) és Móricz Benjámín (2023c, az ELTE másodéves matematikus hallgatója).

A következőkben egy összeállítás olvasható a tábor legérdekesebb feladataiból és megoldásaiból. A feladatoknál jeleztük, hogy melyik diák hozta a táborba, illetve ki írta le az itt szereplő megoldását.

Tartalomjegyzék

1. Algebra és számelmélet	3
2. Kombinatorika	11
2.1. Kombinatorikus geometria	19
3. Geometria	21

1. Algebra és számelmélet

1. feladat (OKTV 2010/11, Lakner Hanna)

Legyen $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$. Igazolja, hogy

$$x_1(1 - x_1) + (x_2 - x_1)(1 - x_2) + (x_3 - x_2)(1 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1})(1 - x_n) < \frac{1}{2}.$$

Első megoldás (elmondta Dulácska Dániel, leírta Petrányi Lilla). Bontsuk ki a zárójeleket, szorozzunk be (-2) -vel és adjunk hozzá 1-et mindkét oldalhoz. A kapott egyenlőtlenség:

$$2x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 - 2x_1x_2 + \dots + 2x_n^2 - 2x_n + 2x_{n-1} - 2x_{n-1}x_n + 1 > 0$$

Láthatjuk, hogy a $2x_i$ -s tagok kiesnek, kivéve a $-2x_n$ a végén. A többi tagot átalakíthatjuk olyan módon, hogy

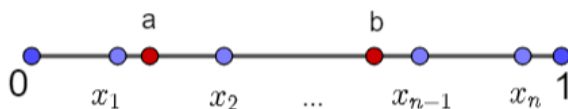
$$(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_{n-1})^2.$$

Ekkor a maradék tagok csak az $x_1^2 + x_n^2 + 1$, amit szintén át lehet alakítani $(x_n - 1)^2 + x_1^2$ -re. Tehát az eredeti egyenlőtlenség:

$$(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_{n-1})^2 + (x_n - 1)^2 + x_1^2 > 0$$

Mivel a bal oldalon minden tag egy valós szám négyzete, ami pozitív (mert semelyik $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$), az összegük is pozitív lesz, tehát készen vagyunk. $\square$

Második megoldás (elmondta Szakács Ábel, leírta Petrányi Lilla). Ábrázoljuk a számokat a számegegyenesen. Sorsoljunk két random számot (legyen a és b) a $0 - 1$ intervallumon!



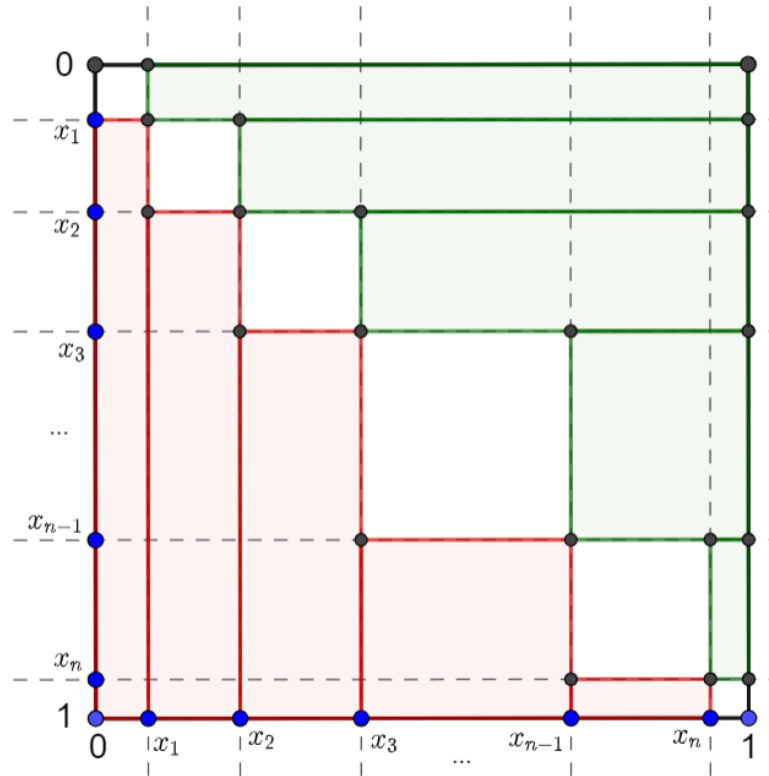
Ekkor az egyenlőtlenségben az i . tag azt jelenti, hogy mekkora a valószínűsége, hogy x_i a legkisebb szám, ami elválasztja a -t és b -t. Ehhez az kell, hogy x_i -nél kisebb legyen a és x_i -nél nagyobb legyen b , amikre pontosan $x_i - x_{i-1}$ és $1 - x_i$ esély van, tehát ezeket összeszorozva megkapjuk a keresett valószínűséget.

Ezek összege pedig annak a valószínűsége, hogy létezik olyan x_i , ami elválasztja a -t és b -t. Tudjuk, hogy

$$p(\exists i : a < x_i < b) < p(a < b) = \frac{1}{2},$$

tehát készen vagyunk, mivel a bal oldal egyenlő az egyenlőtlenség bal oldalával, a jobb oldal pedig $\frac{1}{2}$. $\square$

Harmadik megoldás (elmondta Prohászka Bulcsú, leírta Petrányi Lilla). Vegyünk fel egy egység oldalú négyzetet, és jelöljük be az oldalain az x_i pontokat az ábra szerint.



Az egyenlőtlenség bal oldalán található tagok egyes téglalapok területeit jelölik, mivel a téglalapok egyik oldalhossza $(x_i - x_{i-1})$, a másik pedig $(1 - x_i)$. Láthatjuk, hogy ilyen módon kétszer is belefér az összes téglalap a négyzetbe, és

$$\sum_{i=1}^n x_i^2$$

marad ki, ami pozitív, tehát

$$x_1(1 - x_1) + (x_2 - x_1)(1 - x_2) + (x_3 - x_2)(1 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1})(1 - x_n) < \frac{1}{2}.$$

□

2. feladat (?, Ta Minh Khoa)

Számítsd ki a következő kifejezés értékét: $\prod_{n=1}^{22} \cos(4n^\circ)$.

Megoldás (elmondta: Erdélyi Kata, leírta: Lakner Hanna).

Szorozzuk meg a kifejezést következővel: $2^{22} \cdot \prod_{n=1}^{22} \sin(4n^\circ)$.

A $2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$ addíciós tételt alkalmazva a következő egyenlőséget tudjuk felírni:

$$2^{22} \cdot \prod_{n=1}^{22} \sin(4n^\circ) \cdot \prod_{n=1}^{22} \cos(4n^\circ) = \prod_{n=1}^{22} \sin(8n^\circ)$$

A kapott szorzatot két részre bontjuk:

$$\prod_{n=1}^{22} \sin(8n^\circ) = \prod_{n=1}^{11} \sin(8n^\circ) \cdot \prod_{n=12}^{22} \sin(8n^\circ)$$

Használva a $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$ trigonometrikus azonosságot, látjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \sin(96^\circ) &= \sin(84^\circ) \\ \sin(104^\circ) &= \sin(76^\circ) \\ &\vdots \\ \sin(176^\circ) &= \sin(4^\circ) \end{aligned}$$

Itt a bal oldalon megjelenik minden 90° és 180° közti, fokban mérve 8-cal osztható szög, míg a jobb oldalon minden 0° és 90° közötti, fokban mérve 8-cal osztva 4 maradékot adó szög. Azaz:

$$\prod_{n=12}^{22} \sin(8n^\circ) = \prod_{n=1}^{11} \sin(8n^\circ + 4^\circ);$$

melyből következően:

$$\prod_{n=1}^{22} \sin(8n^\circ) = \prod_{n=1}^{11} \sin(8n^\circ) \cdot \prod_{n=12}^{22} \sin(8n^\circ) = \prod_{n=1}^{11} \sin(8n^\circ) \cdot \prod_{n=1}^{11} \sin(8n^\circ + 4^\circ) = \prod_{n=1}^{22} \sin(4n^\circ).$$

Tehát:

$$2^{22} \cdot \prod_{n=1}^{22} \sin(4n^\circ) \cdot \prod_{n=1}^{22} \cos(4n^\circ) = \prod_{n=1}^{22} \sin(8n^\circ) = \prod_{n=1}^{22} \sin(4n^\circ);$$

egyszerűsítve:

$$2^{22} \cdot \prod_{n=1}^{22} \cos(4n^\circ) = 1.$$

Tehát a feladat kérdésére a válasz:

$$\prod_{n=1}^{22} \cos(4n^\circ) = \frac{1}{2^{22}}.$$

□

3. feladat (?, Chen JiaTong)

100 pozitív valós számról tudjuk, hogy összegük 1. Mikor tudjuk elhelyezni ezeket a számokat egy kör kerületén úgy, hogy ha összeszorozzuk a szomszédos párokat, és összeadjuk a szorzatokat, akkor a kapott összeg kisebb, mint 0,01?

Első megoldás (Holló Martin). Azt fogjuk megmutatni, hogy csak akkor nem tudjuk elhelyezni a számokat, ha minden szám értéke 0,01.

Ha minden szám ennyi, akkor a páronkénti szorzat biztosan 0,0001, így a 100 szorzat összege biztosan 0,01, ami túl sok.

Megmutatjuk, hogy minden más esetben lehetséges elhelyezni így a számokat.

Legyenek a számok $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{50} \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{50}$. Először helyezzük csak el az 50 legnagyobb számot, azaz a y_i -ket tetszőlegesen a kör kerületére, minden második helyre. Ezt megtehetjük, hisz ez pont a számok fele.

A körön üresen maradt 50 hely mindegyikére tekintsük a két szomszédos helyen levő y_k összegét. Írjuk az x_1 -et arra az üres helyre (azon két szám közé), ahol az összeg a legnagyobb volt, írjuk oda x_2 -t, ahol az összeg a 2. legnagyobb volt és így tovább. Végül írjuk oda x_{50} -et, ahol az 50 nagyobb szám közül a 2 egymás melletti szám összege a legkisebb volt. Így mind a 100 számot felírtuk a körre. Belátjuk, hogy erre a felírásra teljesül, hogy ha összeszorozzuk a szomszédos párokat, és összeadjuk a szorzatokat, akkor a kapott összeg kisebb, mint 0,01.

Legyen az x_i -k átlaga x . Ekkor ha veszünk az első 50 szám között egy átlagnál kisebb x_k és egy átlagnál nagyobb x_n számokat, és x_k -t és x_n -t elkezdjük egymás felé tolni úgy, hogy az összegük nem változik, de a különbségük csökken, addig amíg az egyik x nem lesz. Ekkor a 100 szám összege továbbra is 1, illetve az az x_i -k átlaga továbbra is x , míg a páronkénti szorzatösszeg nőhet, de semmiképp nem csökken. Hisz ha x_k mellett az A és B szám van, x_n mellett pedig a C és D , és mi a 2 számot z -vel változtatjuk, akkor csak az Ax_i, Bx_i, Cx_j, Dx_j szorzat változik, összesen ennyit: $z(A+B) - z(C+D)$. Mivel $x_i < x < x_j$, így $A+B \geq C+D$, hisz ez elején úgy helyeztük el a számokat, hogy ez teljesüljön, illetve mivel mindig egy x -nél kisebb illetve x -nél nagyobb számot tolunk, ezért ha esetleg a x_k vagy x_n közül az valamelyiket már módosítottuk, attól még eredetileg is nagyobb volt az x_n , hisz az x érték elválasztja a 2 számot.

Így ezekkel a lépések maximalizálhatjuk az összeget, és ezeket a lépéseket addig csinálhatjuk, amíg az összes szám x nem lesz, hisz ha van az átlagnál nagyobb érték, akkor kisebb is van és ez fordítva is igaz, illetve véges sok lépés után minden szám x lesz. Ekkor az 50 nagyobb számot tetszőlegesen változtathatjuk, ha az összegük nem változik, akkor a szorzatok összege sem fog, hisz ekkor minden y_i -hez a $2xy_i$ érték tartozik, amelyből a $2x$ kiemelhető. Így feltehetjük, hogy az 50 nagyobb szám értéke egyenlő, ez legyen y .

Ekkor $50x + 50y = 100$, vagyis $x + y = 0,02$ és a szorzatok összege $100xy$. Így a számtani-mértani becslés alapján $xy \leq 0,0001$, így $100xy \geq 0,01$. Egyenlőség csak $x = y = 0,01$ esetén lenne, de ez azt jelentené, hogy az x_i -k és az y_j -k átlaga egyenlő, és ez csak akkor lenne lehetséges, ha minden szám egyenlő volna. $\square$

Második megoldás (elmondta Hujter Bálint, leírta Holló Martin). Most csak azt az esetet nézzük, ahol a számok nem egyenlők, a számokat most $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ -zal jelöljük. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha az összes lehetséges módon felírjuk a számok a körre, akkor a kapott szorzatösszegek átlaga kisebb, mint 0,01, így biztosan van olyan felrakás, ahol ennél kisebb lesz.

Összesen $100!$ felrakás van. Egy felrakásban összesen 100 szorzat van, ez összesen $100 \cdot 100!$ szorzat, ezek összegét jelölje S . A szimmetria miatt minden lehetséges pár ugyanannyiszor szerepel. Összesen $\binom{100}{2}$ pár van, így egy pár $98! \cdot 200$ -szor szerepel. Tehát $S = 98! \cdot 200 \cdot T$, ahol

$$T = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_{100} + x_2x_1 + x_2x_3 + \dots + x_2x_{100} + \dots + x_{100}x_1 + \dots + x_{100}x_{99}}{2},$$

a különböző számpárok összege (a számlálóban minden párt kétszer számolunk, aztán osztottunk 2-vel). Viszont T felírható így is:

$$T = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{100})^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{100}^2}{2} = \frac{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2)}{2}$$

Számtani-négyzetes becslés alapján a számok négyzetösszege legalább $100 \cdot \frac{1}{100^2} = \frac{1}{100}$, és egyenlőség csak akkor lehetne, ha minden szám egyenlő lenne. Így $T < \frac{99}{200}$, amiből

$$S = 98! \cdot 200 \cdot T < 98! \cdot 200 \cdot \frac{99}{200} = 99!,$$

így a lehetséges felírások átlaga:

$$\frac{S}{100!} < \frac{1}{100}.$$

Épp ezt akartuk bizonyítani. □

4. feladat (EGMO 2022/2, Nguyen Kim Dorka)

Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt, amelyre tetszőleges pozitív egész a, b számokra az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:

$$(1) \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

$$(2) \quad f(a), f(b) \text{ és } f(a+b) \text{ számok közül legalább kettő egyenlő.}$$

Megoldás (Erdélyi Kata). Legyen $a = 1$ és b egy pozitív, egész szám. Az (1) feltételből következik, hogy

$$f(ab) = f(b) = f(a)f(b) = f(1)f(b).$$

Ekkor $f(b)$ -vel lehet egyszerűsíteni, mert csak pozitív, egész szám lehet az értéke. Így $f(1) = 1$ lesz. (1) feltételből következik, hogy minden szám $f(x)$ értéke a prímtényezős felbontásából következik. Úgy kapjuk, hogy a megfelelő hatványon összeszorozzuk a prímtényezők $f(x)$ értékeit. Tehát elegendő a prímtényezők függvényértékét megnézni és utána minden szám értéke meghatározott lesz.

Ha minden $f(x) = 1$: ez az eset triviálisan igaz lesz, mindkét feltételt kielégíti.

Ha nem minden prímszám értéke 1, akkor lesz egy legkisebb p prímszám, amire $f(p) \neq 1$. (Azaz minden $p' < p$ prímszámra $f(p') = 1$.) Vezem a p utáni első q prímet, amelyről nem tudom, hogy $f(q)$ érték 1-e. Ez azt jelenti, hogy felteszem minden $p \neq q' < q$ prímre, hogy $f(q') = 1$.

Vezem $p, q, q - p$ számokat. $p \nmid q - p$, mert p, q különböző prímszámok. Ezért $q - p < q$, ezért csak olyan prímszámok osztják, amik q -től kisebbek és p -vel nem oszthatók. Ezeknek a függvényértéke 1, ezért $f(q - p) = 1$ kell legyen. (2) feltétel miatt $f(q) = f(p)$ vagy 1, mert $f(p) \neq 1$.

Ha $q > p^2$: Ekkor lehet venni $q, q - p^2, p^2$ számokat. $p \nmid q - p^2$, mert p, q különböző prímszámok. Mivel $q - p^2 < q$, ezért csak olyan prímszámok osztják, amelyek q -től kisebbek és p -vel nem oszthatók. Ezeknek a függvényértéke 1, ezért $f(q - p^2) = 1$ kell legyen. (2) feltétel miatt $f(q) = f(p^2)$ vagy 1, mert $f(p) \neq 1$.

Ha $q < p^2$: Ekkor vezem $q \cdot \ell, p^2, p^2 - q \cdot \ell$ számokat. Ekkor $p^2 - q \cdot \ell < q$ feltehető, mert p, q relatív prímek. Ekkor tudom, hogy $\ell < p$, mert $p \cdot q > p^2$, ami abból következik, hogy $q > p$. Tehát ℓ egy p -től kisebb szám, tehát a $f(\ell) = 1$ biztosan. $p \nmid p^2 - q \cdot \ell$, mert $p, q\ell$ relatív prímek. Tehát $f(p^2 - q \cdot \ell) = 1$. Így $f(q \cdot \ell) = f(q) \cdot f(\ell) = f(q) \cdot 1 = f(q) = f(p^2)$ vagy $f(p^2 - q \cdot \ell) = 1$. $p^2 \neq q$, mert különböző prímszámok. Tehát ez volt az összes eset. A szétválasztott esetekből látható, hogy $f(q) = 1$ vagy $f(p^2)$ és az első esetből látható, hogy $f(q) = 1$ vagy $f(p)$. Mivel $f(p)^2 = f(p^2) \neq 1$, ezért csak $f(q) = 1$ elégíti ki az összes feltételt.

Tehát beláttam, hogy csak egyetlen p prím függvényértéke vehet fel 1-től különböző értéket legfeljebb. Összefoglalva a megoldások:

- vagy $f(n) = 1$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén
- vagy valamilyen rögzített p prímszámra $f(n) = f(p)^{\nu_p(n)}$, ahol $\nu_p(n)$ jelöli p kitevőjét az n prímtényezős felbontásában.

□

5. feladat (klasszikus, Czirják Márton)

Van $(2n + 1)$ súlyunk. Azt tudjuk, hogy ha bármelyiket elvesszük, akkor a maradék $2n$ szétosztható 2 darab n súlyt tartalmazó csoportba úgy, hogy a két csoport össztömege megegyezzen.

a) Bizonyítsuk be hogy ha az összes súly tömege kg-ban mérve racionális, akkor az összes súly ugyanolyan nehéz volt kezdetben.

b) Bizonyítsuk be hogy az a) állítás igaz tetszőleges pozitív valós tömegű súlyokra.

Megoldás (leírta: Zhai Yu Fan). a) Felszorozunk a közös nevezővel, és a kérdés ugyanez marad egészekre.

Egyértelmű, hogy minden súlynak azonos a paritása, különben nem lenne két egyenlő részre osztható a maradék $2n$ súly összege valamelyik esetben.

A következő *módosító lépést* ismételtető algoritmust végezzük a súlyokkal.

- Ha az összes páratlan, akkor minden súlyhoz hozzáadunk 1-et, majd leosztjuk 2-vel.
- Ha az összes páros, akkor minden súlyt leosztunk 2-vel.

Ezen lépések után a két n súlyt tartalmazó csoport összsúlya egyenlő marad, ezért a súlyok paritása is megegyezik.

A módosító lépés hatására minden súly csökken legalább 1-gyel, kivéve, ha már eleve 1 volt.

Tehát véges sok módosító lépés után minden súly egy lesz. De ha két súly egyenlő a lépés után, akkor a lépés előtt is azok voltak. Tehát eredetileg is egyenlő kellett legyen az összes súly.

b) Legyenek a súlyaink $s_1, s_2, \dots, s_{2n+1} \in \mathbb{R}$.

Lemma. Bármely $s_1, s_2, \dots, s_n$ valós számokhoz lehet találni olyan $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ valós számokat (ún. *bázist*), amelyekkel bármely s_i -hez egyértelműen léteznek olyan $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,k}$ racionális együtthatók, amelyekkel s_i előáll a b_j -k *lineáris kombinációjaként*, azaz $s_i = \lambda_{i,1}b_1 + \lambda_{i,2}b_2 + \dots + \lambda_{i,k}b_k$.

A lemma bizonyítása (leírta Hujter Bálint). Ilyen $b_1, b_2, \dots, b_k$ bázis konstruálható a következő rekurzív eljárással.

Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq m < n$ esetén az $s_1, s_2, \dots, s_m$ súlyokhoz már találtunk $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ bázist. (A rekurzió elindításához $m = 1$ esetén a $b_1 = s_1$ alkotta 1-elemű halmaz alkalmas bázisnak).

A $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ számok *lineárisan függetlenek*, azaz μ_j racionális együtthatókkal $\sum_{j=1}^k \mu_j b_j = 0$ csak a triviális $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$ választás esetén lehetséges. Enélkül semmilyen valós szám, így például s_m felírása sem volna egyértelmű, lásd:

$$s_m = \sum_{j=1}^k \lambda_{m,j} b_j = \sum_{j=1}^k \lambda_{m,j} b_j + \sum_{j=1}^k \mu_j b_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_{m,j} + \mu_j) b_j.$$

Ha a $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ bázis elemeinek racionális együtthatós lineáris kombinációjaként fel lehet írni valahogy s_{m+1} -et, akkor ez a felírás is egyértelmű a $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ lineáris függetlensége miatt (hiszen a kétféle felírást kivonva egymásból kapnánk a 0-ra egy nemtriviális felírást). Tehát ilyenkor $s_1, s_2, \dots, s_{m+1}$ számokhoz is jó az eddigi bázis.

Ha s_{m+1} -et nem lehet felírni a $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ bázis elemeinek racionális együtthatós lineáris kombinációjaként, akkor a bázishoz hozzávehetjük a $b_{\ell+1} = s_{m+1}$ vektort.

Azt kell még meggondolni (ezt a Kedves Olvasóra bízunk), hogy a $b_1, b_2, \dots, b_\ell, b_{\ell+1}$ kibővített bázis is lineárisan független (racionális együtthatókkal nézve). Emiatt lesz $s_1, s_2, \dots, s_m$ felírása továbbra is egyértelmű, és s_{m+1} -et sem lehet máshogy felírni, csak a

$$s_{m+1} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots 0 \cdot b_\ell + 1 \cdot b_{\ell+1}$$

alakban. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Visszatérve a feladatra: vegyünk az $s_1, s_2, \dots, s_{2n+1}$ súlyainkhoz egy a lemma által biztosított $b_1, b_2, \dots, b_k$ bázist és tekintsük az $s_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} b_j$ előállításához szükséges, egyértelműen létező $\lambda_{i,j}$ együtthatókat.

Ha s_i -t kivesszük, akkor a többi súlyt szét kell tudnunk osztani két egyenlő részre. Ez azt jelenti (miért is?), hogy bármely rögzített $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ esetén a $\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{i-1,j}, \lambda_{i+1,j}, \dots, \lambda_{2n+1,j}$ együtthatókat fel lehet osztani két n db súlyt tartalmazó csoportra, hogy a két csoport összege megegyezzen.

Feltehetjük, hogy $\lambda_{i,j} > 0$, hiszen ha 0 lenne, akkor hozzáadunk minden súlyhoz b_j -t (ez miért is működik?). Tehát minden rögzített j -re a $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \dots, \lambda_{2n+1,j}$ racionális számokra az a) rész feltételei teljesülnek, így azok mind megegyeznek. Ez épp azt jelenti, hogy minden s_i egyenlő. $\square$

2. Kombinatorika

6. feladat (IMO 1981/2, Kocsis Péter)

Legyen $1 \leq r \leq n$ és tekintsük a $H_n = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes r -elemű részhalmazát. Vegyük e részhalmazok mindegyikéből a legkisebb elemet, és jelölje ezeknek a számtani közepét $F(n, r)$. Bizonyítsuk be, hogy $F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$.

Megoldás (Tajta Sára). Az r elemű részhalmazok száma: $\binom{n}{r}$. Ezekből amikben van 1-es: $\binom{n-1}{r-1}$. Amikben nincs 1-es, de van 2-es: $\binom{n-2}{r-1}$. Amikben nincs 1-es, nincs 2-es, de van 3-as: $\binom{n-3}{r-1}$, ..., Amikben benne van az $n-r$, de az annál kisebb számok nem: $\binom{n-(n-r)}{r-1} = \binom{r}{r-1}$. Amiben benne van az $n-r+1$, de az annál kisebb számok nem: $\binom{n-(n-r+1)}{r-1} = \binom{r-1}{r-1}$. Ezek alapján számoljuk ki a számtani közepet:

$$F_{n,r} = \frac{1\binom{n-1}{r-1} + 2\binom{n-2}{r-1} + 3\binom{n-3}{r-1} + \dots + (n-r)\binom{r}{r-1} + (n-r+1)\binom{r-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

Mivel (a *zokniszabály* néven is ismert azonosság szerint)

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

ezért:

$$F_{n,r} = \frac{\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r+1}{r} + \binom{r}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!r!}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

□

7. feladat (KöMaL B.5000., Kovács Benedek Noel)

Adott 4999 különböző egész szám, az egyik a 42. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük néhány, amelyek összege osztható 5000-rel.

Megoldás (Chen JiaTong). Legyenek a számok: $a_1, a_2, \dots, a_{4998}, a_{4999}$ és definiáljuk a következő összegeket:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Most indirekten tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, vagyis nem lehet néhány számot kiválasztani, hogy összegük osztható legyen 5000-rel.

Vegyük észre, hogy tetszőleges $1 \leq i < j \leq 4999$ -ra igaz, hogy $S_i \not\equiv S_j \pmod{5000}$, különben $S_j - S_i$ néhány szám összege lenne és osztható lenne 5000-rel. Kiderült, hogy S_i -k 5000-es maradéka $1, 2, \dots, 4999$ valamilyen sorrendben.

Vegyük a $T = a_1 + a_3$ összeget, ez esetben $T \not\equiv S_k \pmod{5000}$, ha $k \geq 3$, különben $S_k - T$ megint néhány szám összege.

Nyilván $T \equiv 0 \pmod{5000}$ sem lehet az indirekt feltevésünk szerint, tehát azt kaptuk, hogy $T \equiv a_1$ vagy $T \equiv a_1 + a_2$. Az első esetben a_2 osztható lenne 5000-rel. Tehát a $T = a_1 + a_3 \equiv a_1 + a_2$ áll fenn, azaz $a_2 \equiv a_3$. Mivel az indexeket tetszőlegesen felcserélhetők, ezért ugyanígy beláthatjuk: $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_{4999}$, és mivel egyikük a 42, ezért minden $a_i \equiv 42$. Most készen vagyunk, mert 42 nem relatív prím 5000-hez, tetszőleges 2500 számot kiválasztva az összeg osztható lesz 5000-rel. Ellenmondáshoz jutottunk, tehát igaz az állítás. $\square$

8. feladat (KöMaL B.4491., Haskó Emma)

100 elítélt nevét valamilyen sorrendben beleteszik 100 sorszámmal ellátott fiókba. Ezek után az egyszemélyes celláikból egyesével véletlenszerűen behívják a rabokat. Mindegyikük tetszése szerint kihúzhat egyesével 50 fiókot. Ha megtalálta valamelyikben a saját nevét, akkor elvezetik egy külön terembe, ha nem, akkor az összes elítéltet azonnal kivégzik. Végül, ha mindannyian szerencsével jártak, valamennyiüket szabadon engedik. Mutassuk meg, hogy e szabályok ismeretében a rabok ki tudnak dolgozni egy olyan stratégiát, amelyet alkalmazva 30%-nál nagyobb az esélye annak, hogy kiszabadulnak.

Megoldás (Czanik Pál). A következő stratégiát alkalmazzuk: minden rab válasszon egy sorszámot 1-től 100-ig, ez lesz az ő fiókjának a sorszáma. Amikor behívnak egy rabot, először húzza ki az ő fiókját. Ezután, ha nem az ő neve van benne, akkor az ahhoz a névhez tartozó fiókot. Majd az abban lévő névhez tartozó fiókot, és így tovább. Mekkora ekkor az esélye, hogy ha a sorszámokat véletlenszerűen választják, mindenki megtalálja a nevét?

A fiókok meghatároznak egy 100 csúcsú irányított gráfot: mindegyikből mutasson egy él arra a fiókra, amit utána nyitnak ki, tehát a benne lévő névhez tartozó fiókra. Mivel ez egy véges irányított gráf, ahol minden csúcsnak a be- és kifoka is 1, így néhány diszjunkt irányított körből áll. Figyeljük meg, hogy ha egy rabhoz tartozó fiók k hosszú körben van, akkor a rab pontosan k fiók kihúzása után találja meg a nevét, hiszen sorban húzza ki a körében található fiókokat, legutoljára azt, amelyben a saját neve van. Így akkor és csak akkor sikeres a rabok próbálkozása, ha ebben a véletlenül választott gráfban nincsen 50-nél hosszabb kör. Tehát ennek az esélyét kell kiszámolni.

Egy 100 csúcsú gráfban csak egy darab 50-nél hosszabb kör lehet. Számoljuk ki az esélyét annak, hogy ez a kör pontosan k hosszú ($k > 50$). Összesen $100!$ féle ilyen gráf van. A kör k csúcsát $\binom{100}{k}$ módon lehet kiválasztani, a sorrendjüket $(k-1)!$ módon, és a maradék csúcsok között futó élek elrendezését $(100-k)!$ módon. Így annak az esélye, hogy van k hosszú kör:

$$\frac{\binom{100}{k} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)!}{100!} = \frac{\frac{100!}{(100-k)! \cdot k!} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)!}{100!} = \frac{1}{k}$$

Ez alapján a stratégia $1 - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}\right) \approx 0,3118$ eséllyel sikeres, ami valóban több, mint 30%. $\square$

Megjegyzés. Cseréljük le a 100-at tetszőleges páros n -re! Próbáljuk meg kicsit mélyebben megérteni az $\frac{n}{2}$ tört összeadását, becsüljük felülről az összegüket egy integrállal:

$$\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n \frac{1}{k} \leq \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{1}{x} dx = \ln n - \ln \frac{n}{2} = \ln n - (\ln n - \ln 2) = \ln 2 \approx 0,6931$$

Vagyis a rontás esélye legfeljebb $\ln 2$, ami kevesebb, mint 70%, vagyis a rabok legalább 30% eséllyel szabadulnak.

9. feladat (Kürschák 2006/3, Hujter Bálint)

Egy kör alakú asztalnál n játékos foglal helyet, akik között valahogyan szétosztunk $n - 1$ korongot. Ezután a játékosok a következő szabály szerint adogatják egymás között a korongokat: ha létezik olyan játékos, akinél legalább két korong van, akkor valamelyik ilyen játékos átad egy-egy korongot a két szomszédjának. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is adogatnak, előbb-utóbb minden játékosnál legfeljebb egy korong lesz.

A feladatra három szép megoldás és számos további érdekes megjegyzés olvasható a KöMaL 2007 februári számában, a 2006. évi Kürschák Verseny megoldásainak ismertetésénél¹. A táborban azonban két, ezektől lényegesen különböző megoldás született, ezek leírata következik.

Kocsis Péter megoldása. Ebben a megoldásban az eredeti játék helyett annak „inverzét” vizsgáljuk: ebben egy lépésben egy ember mindkét szomszédjától kap egy-egy kavicsot. Azt, hogy egy játék véges idő alatt véget ér, úgy fogjuk belátni, hogy megmutatjuk, hogy bármely lehetséges játékhelyzet bármely lehetséges múltja véges sok lépésből áll (azaz bármely).

Először egy olyan lemmát bizonyítunk, amely az eredeti és az inverz játékban is érvényes és érdekes.

Lemma. A játék bármely pillanatában lehet találni olyan egymást követő $a_1, a_2, \dots, a_k$ embereket, hogy a_1 és a_k kavicsainak száma 0, míg a köztük lévő embereknek ($a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$) pontosan 1 kavicsuk van. Ezt nevezzük **szigetnek**.

Megjegyzés: Esetleg előfordulhat a_1 és a_k nem feltétlenül különböző emberek, mert a sziget „körbeér”. Persze ha ez a helyzet, akkor mindenkinél legfeljebb 1 korong van, ami éppen a feladatban elérni kívánt állapot.

Lemma bizonyítása. Válasszuk ki azokat az embereket az n közül, akiknek 0 kavicsuk van: nevezzük őket $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ -nek.

Ha egy b_i -től b_{i+1} -ig tartó intervallum nem sziget, akkor a köztük levő h embernél összesen legalább $h + 1$ korong kell legyen (mindenkinél legalább 1 és legalább egy embernél legalább 2). Így ahhoz, hogy ha egyik b_i -től b_{i+1} -ig tartó intervallum se legyen sziget, összesen legalább

$$\underbrace{n - \ell}_{\text{emberek száma legalább 1 kavicsal}} + \underbrace{\ell}_{\text{intervallumonkénti}+1} = n$$

korongot kellene szétosztani. □

Most áttérünk az inverz játék vizsgálatára.

Élet a szigeten. Tekintsük egy $(a_1, \dots, a_k)$ szigetet, és vizsgáljuk a lehetséges inverz lépések hatását erre a szigetre.

- **1. eset:** Ha a szigeten kívül történik egy inverz lépés, az nem befolyásolja a szigetet.
- **2. eset:** Ha a_1 -en vagy a_k -án hajtunk végre inverz lépést, akkor a_2 -nál vagy a_{k-1} -nél levő kavicsok száma 0-ra változik, így kapunk egy kisebb szigetet a_3 -tól a_n -ig, vagy a_1 -től a_{n-2} -ig.

¹ez elérhető az <http://db.komal.hu/KomalHU> oldalon, a „A 2006. évi Kürschák” címre keresve

- **3. eset:** a_2 -n és a_{k-1} -en nem tudunk inverz lépést végrehajtani, mivel a szomszédjuk 0 kavicsot tartalmaz.
- **4. eset:** Ha a sziget egy belső pontján, a_i -n hajtunk végre inverz lépést (ahol $2 < i < k - 1$), akkor a sziget két kisebb szigetre bomlik.

Akármilyen lépést is hajtunk tehát végre, a választott szigetünk vagy érintetlen marad, vagy az eddigi területének egy részén lesz tekinthetünk egy kisebb szigetet az eredeti sziget örökösének. Nevezzük S -nek ezt az időben változó (néhány lépésenként kisebbé váló) szigetet.

A fenti esetvizsgálatból az is kiderül, hogy S méretének két csökkenése között csak olyan inverz lépések történhetnek, amelyek nem érintik S -t.

Élet a szigeten kívül. Az inverz játékban, amíg S mérete állandó, csak a szigetet nem érintő inverz lépések történhetnek. Az S -en kívüli emberek elhelyezhetők egy szakasz mentén (a szomszédságok megőrzésével), és így az S -en kívüli kavicsok között egyszerűen mérhetünk távolságokat. Ha a szigeten kívüli kavicsokat 1-től m -ig számozzuk, akkor, és $d(i, j)$ jelöli az i és j számú kavics távolságát, akkor tekintsük az

$$D = \sum_{1 \leq i < j \leq m} d(i, j)$$

távolságösszeget. Vegyük észre, hogy D minden (S -n kívüli) inverz lépésben pontosan 2-vel fog csökkenni. Valóban: az inverz lépésben érintett két kavics egymástól vett távolsága 2-ről 0-ra csökken, bármely más kavics pedig 1-gyel közelebb kerül az egyikhez és 1-gyel távolabb a másiktól.

Mivel triviálisan $D \leq n \cdot \binom{m}{2} \leq n \cdot \binom{n-1}{2}$, ezért S méretének két csökkenése között legfeljebb $\frac{n}{2} \cdot \binom{n-1}{2}$ inverz lépés történhetett.

Összefoglalás. Mivel S mérete mindig n -nél kisebb (és sosem nő), így n -nél kevesebbszer csökkenhet. Így az inverz játékban legfeljebb $n \cdot \frac{n}{2} \cdot \binom{n}{2} < n^4$ lépést végezhetünk, bármilyen kezdőhelyzetből.

Tehát az eredeti játékban bármely helyzet múltja legfeljebb n^4 lépésből áll, azaz minden játéknak véget kell érnie legfeljebb n^4 lépésben. (Egy játék akkor és csak akkor ér véget, ha minden játékosnak pontosan egy korongja van.) $\square$

2.1. megjegyzés. Utólag könnyen javíthatjuk a játék hosszára vonatkozó becslésünket erre:

$$\frac{n-4}{2} \cdot \binom{n-2}{2} < n^3.$$

Ehhez egy tetszőleges játékalapotban válasszunk egy S szigetet és tekintsük ennek egy T örökösét, amelyet az inverz játék végigjátszása végén kapunk. Könnyen meggondolható, hogy az inverz játék során T területén egyetlen inverz lépés sem történt, és így persze T területén nem is haladhatott át korong. Így T -n kívüli embereket egy szakaszra rendezve, és az inverz játék végén náluk levő legfeljebb $m \leq n - 2$ korongot megszámozva és a távolságaikat (egy-egy pár távolsága legfeljebb $n - 4$, hiszen T legalább 3 mezőből áll) követve láthatjuk, hogy a

$$D = \sum_{1 \leq i < j \leq m} d(i, j)$$

távolságösszeg minden lépésben legfeljebb 2-vel csökken.

Dulácska Dániel megoldása. Legyenek a H_1 (multi)halmazban felsorolva azon emberek nevei multiplicitással, akik tudnak lépni, azaz korongot adni a szomszédaiknak. A multiplicitással szó alatt azt értjük, hogy minden játékos pontosan annyszor van felsorolva, ahányszor ő képes lépni (anélkül, hogy újabb korongokat kapna). Azaz egy ember annyszor van benne H_1 -ben, mint amennyi a nála levő korongok számának fele, lefele kerekítve.

A játék egy lépése során kiválasztunk egy embert a H_1 halmazból, és vele lépünk (ezzel az ő multiplicitása 1-gyel csökken H_1 -ben, míg a szomszédai multiplicitása nőhet vagy stagnálhat). A játék akkor ér véget, ha minden játékosnál 1 korong van (kivéve egyet, akinél 0). Ez csak akkor lehet, ha már senki nem képes többet lépni, vagyis a H_1 halmaz üres.

Lemma. Ha egy ember szerepel a H_1 halmazban, akkor előbb-utóbb lépnie kell.

A lemma bizonyítása. Egyrészt a halmazból csak az kerül ki, akivel léptünk. Másrészt minden emberre igaz, hogy legfeljebb $(n - 1)$ -szer léphet a szomszédja két lépése között (hiszen minden lépésekor korongot ad át a szomszédjának). Így előbb-utóbb minden H_1 -beli sorra kerül – hiszen nem érhet véget a játék, amíg a H_1 ki nem ürül. $\square$

A bekerülésnél csak az számít, hogy a két szomszédal mennyit lépünk, a többi más játékoskal való sorrendbeli kapcsolat lényegtelen. Ha valaki belekerülhet a halmazba valamilyen lépéssorozattal, akkor ez előbb-utóbb be fog teljesülni bármilyen szabályos lépéssorozatnál. Így tehát akármilyen sorrendben is lépegetünk a H_1 halmazban felsorolt emberekkel, a végeredmény azonos lesz, tehát a lépések sorrendje nem számít. Elegendő tehát belátnunk, hogy tetszőleges kezdőhelyzetből kiindulva létezik olyan lépéssorozat, ahol a játéknak vége lesz (ugyanis ekkor minden más játékmenet is így fog végződni).

Használjuk az előző H_1 halmazt, valamint legyenek a H_2 halmazban felsorolva az játékosok nevei, akiknél páratlan sok korong van. Ezzel egyértelműen lekódoltuk két halmazba a játékosok korongjait (pl.: ha egy játékosnak 7 korongja van, akkor a H_1 halmazban 3-szor fog szerepelni, míg a H_2 halmazban 1-szer). Vegyük észre, hogy

$$2 \cdot |H_1| + |H_2| = n - 1,$$

hiszen a két halmazban az összes korong helyét felsoroltuk. A játéknak akkor lesz vége, ha a H_1 halmaz üres lesz. Vagyis $|H_2| = n - 1$. Most a következőt állítom:

Tetszőleges állásban lehet találni olyan lépéssorozatot, hogy a lépéssorozat után több páratlan koronggal rendelkező játékos lesz, mint amennyi eredetileg volt.

Most pedig lássuk is ezt be! Válasszunk egy tetszőleges kezdőjátékost a H_1 halmazból. Ekkor 3 eset lehetséges:

1. A kezdőjátékos két oldalán páros sok koronggal rendelkező emberek állnak.
2. A kezdőjátékos egyik oldalán egy páros sok, a másikon egy páratlan sok koronggal rendelkező ember áll.
3. A kezdőjátékos két oldalán páratlan sok koronggal rendelkező emberek állnak.

Kezdetben legyen a kezdő embernél 2 korong, a páratlan embereknél 1, a párosoknál pedig 0 korong. (Ez az a korongmennyiség, amit pakolgatni fogunk, a játékosok ezenfelül rendelkezhetnek tovább $2 \cdot k$ korongokkal, azokra szimplán nem lesz szükségünk.)

Az 1. esetben egyszerű dolgunk van, hiszen 1 lépés után rögtön teljesül az állítás, mert több páratlan ember lesz, mint kezdetben.

A 2. eset már nem ilyen egyszerű. Vegyük a következő példát: legyen a kettes egyik oldalán a 0, a másikon egy sornyi 1-es (az egyesek száma tetszőleges pozitív egész szám lehet)

$$\dots \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

Lépjük a kezdőjátékoskal, majd a melette lévővel, és így tovább, hogy végighaladjunk a soron.

$$\dots \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots$$

Láthatjuk, hogy ezzel a művelettel sikerült szétszedni a páros számot (a 2-t) két páratlanná. Tehát ez az eset is megoldható.

A 3. esetben a kezdőjátékos mindkét oldalán egy sor 1-es található (az 1-esek száma itt is tetszőleges lehet). Fontos megjegyezni, hogy a lánc nem mehet körbe az összes játékoson, mert ahhoz $n - 1$ -nél több korong kellene, így az nem jöhet ki.

$$\dots \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

Lépjük a kezdőjátékoskal. Ekkor az összetett láncunk két félre esik szét:

$$\dots \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

Haladjunk végig a két láncon a 2. esetben megismert módszer szerint.

$$\dots \quad 0 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 0 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots$$

Ismételjük az előző lépéssorozatot a középső láncra addig, amíg az eredeti kezdőjátékos mindkét oldalán 1-es van.

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \dots$$

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{2} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots$$

Most, hogy a kezdőjátékosnak csak az egyik oldalán van 1-es lánc, még egyszer utoljára végezzük el a 2. eset módszerét. (Ha a két oldalon a láncok hossza azonos volt, akkor erre a lépésre nem lesz szükség)

$$\dots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots$$

Ezzel a 3. esetre is adtuk lehetséges lépéssorozatot. Vagyis a feltett állításunk teljesül: véges lépésen belül mindig lehet növelni a páratlan elemek számát. Mivel létezik olyan lépéssorozat, amivel elérhető a nyerő állás (minden játékosnál legfeljebb 1 korong van, vagyis $n - 1$ darab páratlan sok koronggal rendelkező játékos van), így innen már tudjuk, hogy akármilyen sorrendben is lépegetnek a játékosok, mindig ez az állás lesz a vége, hiszen a lépések sorrendje tetszőleges. Ezzel a feladatot beláttuk. $\square$

2.1. Kombinatorikus geometria

10. feladat (KöMaL B.5011., Sárdinecz Dóra)

Adott a síkon 6 általános helyzetű pont úgy, hogy bármely két pont távolsága különböző. Mutassuk meg, hogy megadható két olyan háromszög, amelyeknek minden csúcsa ezen pontok közül való, és a két háromszögnek van egy közös oldala, amely az egyik háromszögben a legrövidebb, a másikban a leghosszabb oldal.

Megoldás (leírta: Szabó Imre Bence). Vegyük a pontok által meghatározott szakaszokat. Azokat a szakaszokat, amelyek valamely, a pontok által meghatározott háromszögben leghosszabb oldalak, színezzük pirosra. A fennmaradó, nem piros szakaszokat színezzük kékre. Használjuk a következő közismert lemmát.

Lemma. 6 csúcsú gráf éleit két színnel színezve keletkezik egyszínű háromszög.

Az lemmát felhasználva vegyük a feladatban szereplő 6 pont által alkotott gráfban lévő ugyanolyan színű szakaszokból álló háromszöget. Ennek a háromszögnek nem lehet mind a 3 oldala kék, mivel a bizonyítás elején kimondtuk, hogy minden háromszögben a leghosszabb oldalt pirosra színezzük. Azaz, ennek a kiválasztott háromszögnek mind a 3 oldala piros. Ha vesszük ezen 3 piros szakasz közül a legrövidebbet, az ennek a háromszögnek a legrövidebb oldala. Mivel ez a szakasz piros, ezért van olyan háromszög, amely oldalai közül ez a szakasz a leghosszabb. Ezzel teljesítettük a feladat feltételeit. $\square$

11. feladat (KöMaL B.4487., Haskó Emma)

Van-e olyan sík, amely egy szabályos oktaédernek egyik csúcsán sem megy át, de mindegyik lapját metszi?

Első megoldás (leírta: Ta Minh Khoa). Tegyük fel, hogy létezik ilyen S sík.

S a 8 lapnak 2-2 élét metszi, de mivel egy él két laphoz tartozik, ezért minden élt kétszer számoltuk, szóval S az oktaéder 12 éle közül 8-at kellene, hogy metsszen. Most vegyünk 3 négyzetet úgy, hogy a csúcsok közül kiválasztunk egy olyan szemközti csúcspárt, amit még nem választottunk, azokat kihagyjuk és a maradék 4 csúcs határozzon meg egy négyzetet. Mivel S egy csúcson se mehet át, ezért egy négyzetnek vagy 0, vagy 2 élét metszheti, viszont így legfeljebb csak 6 élt metszhet, ami nem elegendő. Ellentmondásra jutottunk. $\square$

Második megoldás (Ta Minh Khoa). Továbbra is jelölje S ezt a síkot.

Az oktaédert osszuk fel 3 síkkal, amik legyenek az előző megoldásban felhasznált négyzeteknek a meghosszabbításai. Így 8 olyan részre bontottuk a teret, amik az oktaéder 1-1 lapját tartalmazzák. Ahhoz, hogy S metsszen egy lapot és ne menjen át egy csúcson se, muszáj az adott lapot tartalmazó teret kettévágnia, itt viszont bajba kerülünk, mivel S -nek $8 \cdot 2$ db részre kéne darabolnia a teret, de közismert, hogy 4 síkkal legfeljebb csak 15 részre osztható a tér. Ismét ellentmondásra jutottunk. $\square$

Megjegyzés. Kockára és tetraéderre is lehet találni olyan síkot, amely egyik csúcsán sem megy át, de mindegyik lapját metszi.

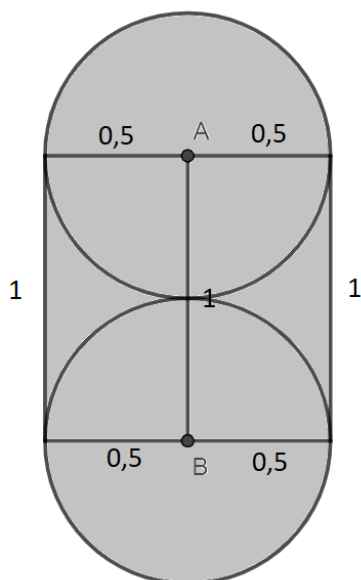
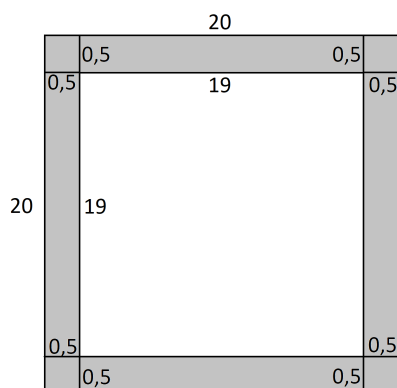
12. feladat (KöMaL B.4537., Sárdinecz Dóra)

Egy 20×20 -as négyzetben elhelyeztünk 200 darab egységszakaszt.

Bizonyítsuk be, hogy létezik a négyzetben olyan egység átmérőjű körlap, amelynek egyik egységszakasszal sincs közös pontja.

Megoldás (Kovács Benedek Noel). Vizsgáljuk meg, hogy hová tudjuk elhelyezni az egység sugarú körlapunk középpontját! Tudjuk, hogy ez minden olyan pontba elhelyezhető, amely a tábla szétéről és a szakaszoktól legalább $r = 1/2 = 0,5$ távolságra van. Ennek megfelelően számítsuk ki, hogy az egyes alakzatok legfeljebb mekkora területű részt zárnak ki a középpont elhelyezésének szempontjából.

Tudjuk, hogy a tábla szélén lévő, $0,5$ egység hosszú, a négyzet oldalaival párhuzamos sávokra nem helyezhetjük el a kör középpontját, hiszen akkor az lelógna a tábla szélén. Mivel ezen sávok levágása után egy $(20 - 2 \cdot 0,5)^2 = 19^2$ méretű négyzetet kapunk, így ezen sávok összterülete $20^2 - 19^2 = 39$ lesz.



Azt is tudjuk, hogy az egyes szakaszok mentén az ábrán látható területekre nem fogjuk tudni elhelyezni a kör középpontját (ahol a szakasz által kizárt alakzatban a szakasz végpontjainál félkörök, köztes pontjainál pedig mindkét irányba a szakasszal párhuzamos $0,5$ egység széles téglalapok lesznek)! Ezen alakzat területe pedig

$$0,5 \cdot 2 \cdot 0,5^2 \cdot \pi + 1 \cdot 1 \approx 1,785 < 1,79.$$

Mindezekből megállapítható, hogy mivel 200 szakaszt helyeztünk el a táblára, így a körünk középpontját egy legfeljebb $39 + 200 \cdot 1,79 = 397$ nagyságú területre nem fogjuk tudni elhelyezni. Ennek megfelelően pedig fog maradni egy legalább $20^2 - 397 = 3$ méretű terület, ahová lerakhatjuk a körünk középpontját. Ezzel beláttuk, hogy a körünk középpontja valóban lehelyezhető a feladat feltételének megfelelő módon. $\square$

3. Geometria

13. feladat (EGMO 2013/1, Licsik Zsófia)

Az ABC háromszög BC oldalát meghosszabbítjuk C -n túl D -ig úgy, hogy $CD = BC$ legyen. CA -t meghosszabbítjuk A -n túl E -ig úgy, hogy $AE = 2CA$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy ha $AD = BE$, akkor az ABC háromszög derékszögű.

Megoldás (Sohár Bernadett). Nevezzük el az AB szakaszt c -nek, az AC szakaszt b -nek, a CB szakaszt a -nak. Hosszabbítsuk meg az AB oldalt c -vel, így megkapjuk a G pontot. Hosszabbítsuk meg az AC szakaszt b -vel, így kapjuk az F pontot. Látjuk, hogy a DF szakasz hossza c , és a GD szakasz hossza $2b$.

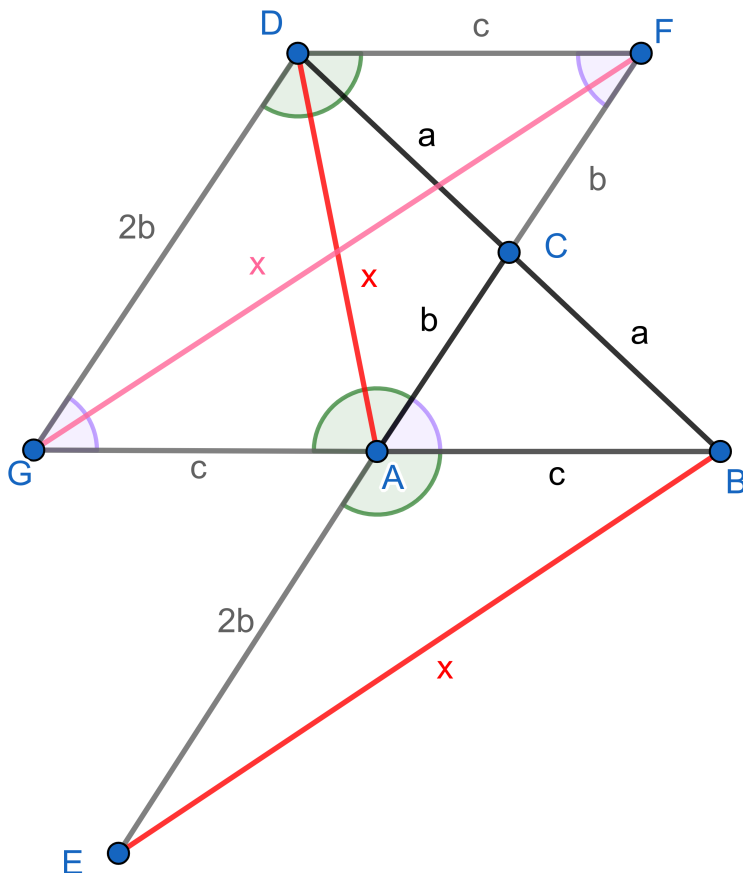
$\angle CAB = \angle DGA$, mert a BAC és BGD háromszögek hasonlóak.

$\angle EAB = \angle GAF = \angle GDF$, mivel a $DGAF$ négyszög paralelogramma (két-két szemköztí oldal egyenlő hosszú) és a paralelogramma szemköztí szögei egyenlő nagyságúak. Emiatt $\angle DFA = \angle DGA$ is teljesül.

Legyen $AD = EB = x$. A GF szakasz hossza is x lesz, mivel az ABE háromszög hasonló DGF -fel (2 oldal és a köztük lévő szög)

Tehát a $DGAF$ paralelogramma átlói egyenlő hosszúak, ezért ez egy téglalap.

Így $\angle GDF = \angle DGA = 90^\circ$. Tehát a CAB is derékszög, azaz az ABC háromszög derékszögű.



□

14. feladat (OKTV 2007/08, Tajta Sára)

Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F , az AB oldal egy belső pontja T , az AF és CT szakaszok metszéspontja M . Az ATM háromszög területe 8, a CFM háromszög területe 15 egység. Mekkora lehet az ABC háromszög területe?

Megoldás (Czirják Márton). Vegyük észre, hogy AF az MBC háromszög egyik súlyvonal, így $T_{BFM} = T_{MFC} = 15$.

Legyen S a BM egyenesnek az AC oldallal vett metszéspontja. Ekkor a Ceva-tétel alapján

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CS}{SA} \cdot \frac{AT}{TB} = 1 \implies \frac{SA}{AT} = \frac{CS}{TB}$$

Ekkor a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $TS \parallel BC$, és így $ATS_{\Delta} \sim ABC_{\Delta}$.

Mivel az AF egyenes súlyvonal az ABC háromszögben, ezért az ATS háromszögben is, hiszen a két háromszöget egy A középpontú középpontos hasonlóság viszi egymásba. Ebből már azonnal következik hogy az AF egyenes súlyvonal a TSM háromszögben is.

Ezekből azt tudjuk, hogy: $T_{AMS} = T_{ATM} = 8$.

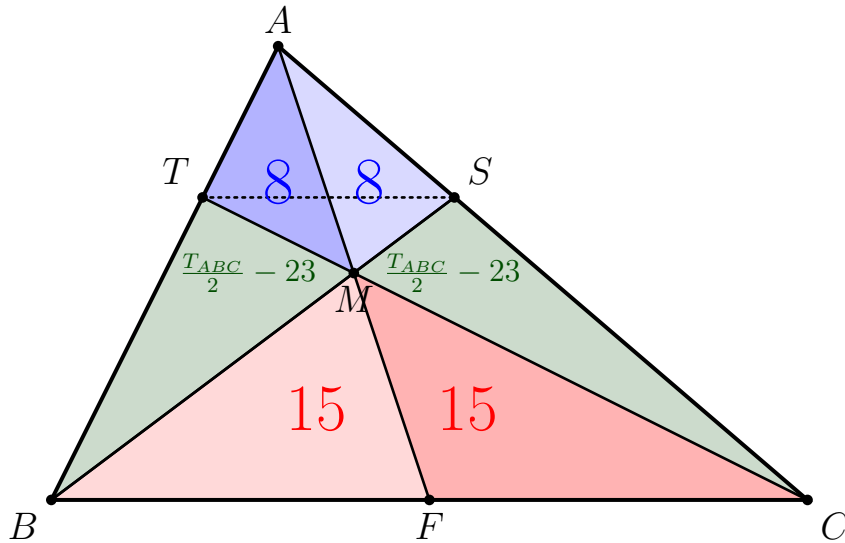
Így viszont $T_{TBM} = T_{SMC} = \frac{T_{ABC}}{2} - 23$, hiszen $T_{ABF} = T_{AFC} = \frac{T_{ABC}}{2}$. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \frac{T_{ATM}}{T_{TBM}} = \frac{T_{ATC}}{T_{TBC}} &\implies \frac{8}{\frac{T_{ABC}}{2} - 23} = \frac{16 + \left(\frac{T_{ABC}}{2} - 23\right)}{30 + \left(\frac{T_{ABC}}{2} - 23\right)} \\ 16(14 + T_{ABC}) &= (T_{ABC} - 46)(T_{ABC} - 14) \end{aligned}$$

Átrendezve:

$$0 = (T_{ABC})^2 - 76T_{ABC} + 420 = (T_{ABC} - 6)(T_{ABC} - 70)$$

Mivel $T_{ABC} > 15 = T_{MFC}$, ezért $T_{ABC} = 70$.



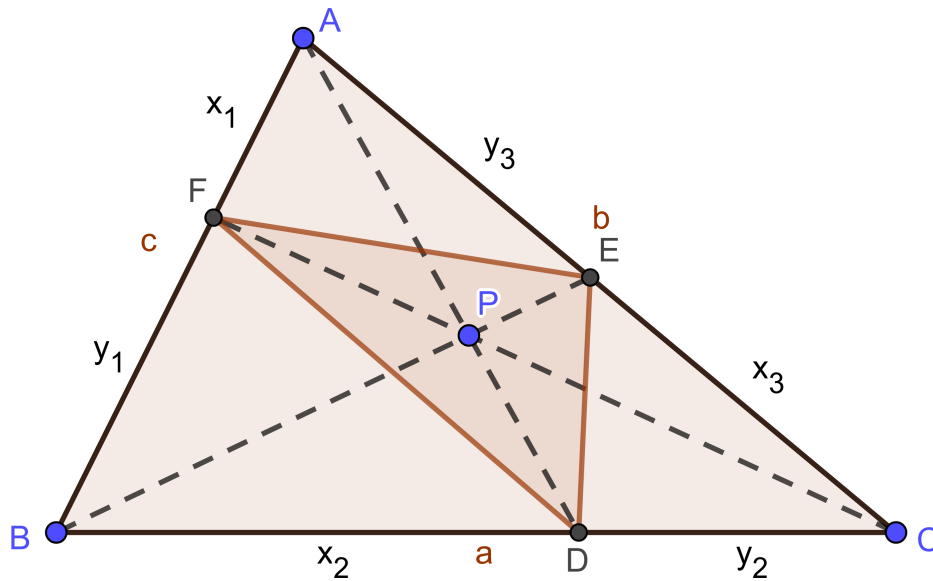
□

15. feladat (KöMaL B.3478., Csilling Dániel)

Az ABC háromszög hozzáírt köreinek középpontjai O_1, O_2, O_3 . Bizonyítsuk be, hogy $O_1O_2O_3$ háromszög területe legalább négyszerese ABC háromszög területének.

Megoldás (Sárdinecz Dóra). A feladat állításánál általánosabb erejű lemmát fogunk bizonyítani.

1. lemma. Ha az ABC háromszög belsejébe eső P pontra a PA, PB, PC egyenesek rendre D, E és F pontokban metszik az a, b, c oldalakat, akkor az ABC háromszög területe legalább négyszerese a DEF háromszög területének.



A lemma bizonyítása. Használjuk az ábrán jelölt $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ jelöléseket a keletkezett Ceva-szakaszokra. A Ceva-tétel szerint: $x_1x_2x_3 = y_1y_2y_3$.

Írjuk fel a vizsgált területek arányát.

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{DEF\Delta}}{T_{ABC\Delta}} &= 1 - \frac{T_{AEF\Delta} + T_{BFD\Delta} + T_{CDE\Delta}}{T_{ABC\Delta}} = 1 - \frac{T_{AEF\Delta}}{T_{ABC\Delta}} - \frac{T_{BFD\Delta}}{T_{ABC\Delta}} - \frac{T_{CDE\Delta}}{T_{ABC\Delta}} = \\
 &= 1 - \left(\frac{\frac{y_3x_1 \sin(\alpha)}{2}}{\frac{bc \sin(\alpha)}{2}} + \frac{\frac{y_1x_2 \sin(\beta)}{2}}{\frac{ca \sin(\beta)}{2}} + \frac{\frac{y_2x_3 \sin(\gamma)}{2}}{\frac{ab \sin(\gamma)}{2}} \right) = \\
 &= 1 - \left(\frac{y_3x_1}{(x_3 + y_3)(x_1 + y_1)} + \frac{y_1x_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} + \frac{y_2x_3}{(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)} \right) = \\
 &= \frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) - y_3x_1(x_2 + y_2) - y_1x_2(x_3 + y_3) - y_2x_3(x_1 + y_1)}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)} = \\
 &= \frac{x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)} = \frac{2x_1x_2x_3}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}.
 \end{aligned}$$

A törtet $x_1x_2x_3$ -mal „egyszerűsítve” $\frac{2}{\left(1 + \frac{y_1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{y_2}{x_2}\right)\left(1 + \frac{y_3}{x_3}\right)}$, erről kellene belátnunk,

hogy értéke legfeljebb $1/4$. Az alábbi, tisztán algebrai 2. lemma tehát befejezi az 1. lemma bizonyítását. $\square$

2. lemma. Ha q_1, q_2, q_3 pozitív valós számokra $q_1 q_2 q_3 = 1$ teljesül, akkor:

$$\frac{2}{(1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)} \leq \frac{1}{4}.$$

A 2. lemma bizonyítása. Bármely pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, így:

$$\begin{aligned} q_1 + \frac{1}{q_1} + q_2 + \frac{1}{q_2} + q_3 + \frac{1}{q_3} &\geq 6 \\ 2 + q_1 + q_2 + q_3 + q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1 &\geq 8 \\ (1+q_1)(1+q_2)(1+q_3) &\geq 8 \\ \frac{2}{(1+q_1)(1+q_2)(1+q_3)} &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\square$

Térjünk most vissza az eredeti feladatra. Vegyük észre, hogy az $O_1 O_2 O_3$ háromszögben az ABC háromszög csúcsai magasságtalppontok, mert AO_1 egyenes pont az α szög belső szögfelezője, amely merőleges az α szög külső szögfelezőjére, amelyre az O_2 , A , illetve O_3 pontok ebben a sorrendben esnek. Ha tehát az eredeti feladatra P az $O_1 O_2 O_3$ háromszög magasságpontja, akkor

$$T_{O_1 O_2 O_3 \Delta} \geq 4 \cdot T_{ABC \Delta}$$

azaz beláttuk az eredeti állítást. $\square$

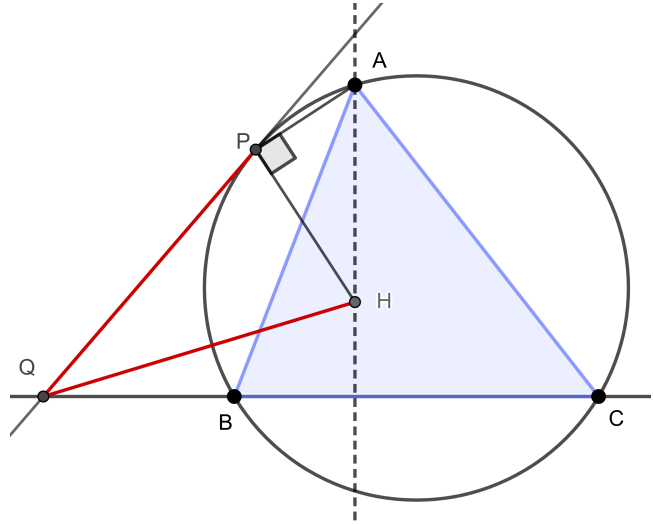
16. feladat (Szakács Ábel saját kitalálású feladata)

Legyen a nem egyenlő szárú ABC háromszög magasságpontja H .

Legyen $P \neq A$ az a pont az ABC háromszög körülírt körén, amelyre $\angle HPA = 90^\circ$.

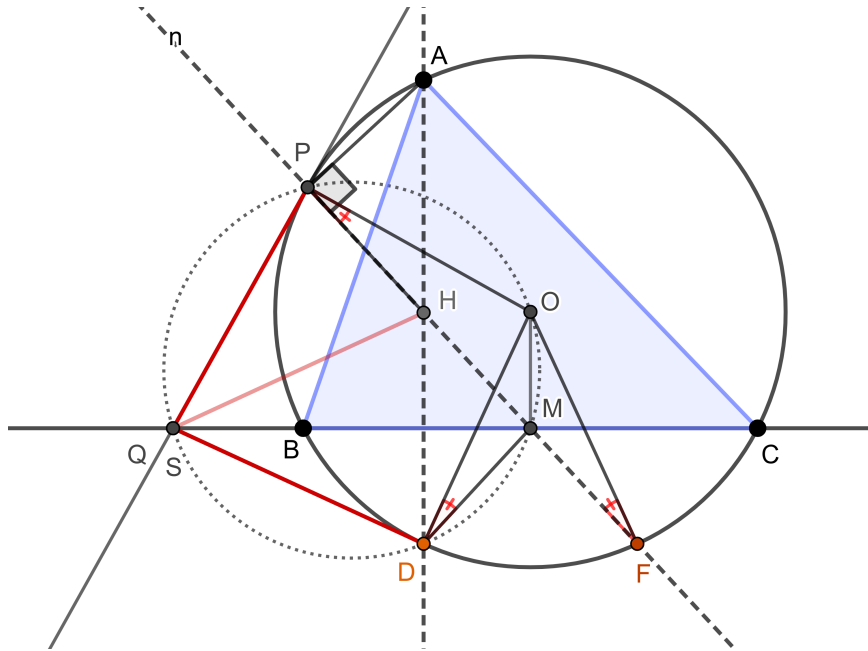
A körülírt kört P -ben érintő egyenes messe a BC egyenest a Q pontban.

Bizonyítsuk be, hogy $PQ = HQ$.



Első megoldás (Prohászka Bulcsú). Először fogalmazzuk át az állítást egy vele ekvivalensre: (★) *Messe a BC -hez tartozó magasság a körülírt kört másodszor D -ben. Ekkor ha Q -ból QP -n kívül a másik érintőt is meghúzzuk a körülírt körhöz, ez pont D -ben fogja azt érinteni.*

Ez azért ekvivalens a feladat állításával, mert ismert, hogy D éppen H tükörképe BC -re, így tehát mivel $Q \in BC$, $HQ = DQ =$ (a másik érintő hossza) $= PQ$. A (★) állítást fogjuk bizonyítani.



Legyen most az S pont a körülírt körhöz P -ben és D -ben húzott érintő metszéspontja. Mi azt akarjuk megmutatni, hogy valójában $S = Q$, ez pont a fentebb leírt állítást jelentené. (hiszen Q -ból QP -n kívül csak egy érintőt lehet húzni a körhöz.)

Vegyük észre, hogy ha M a BC felezőpontja, akkor P, H és M kollineáris. Ezt a következőkből tudjuk: vegyük fel F -et, az A -val szemközti pontot a körülírt körön. Ekkor F, H, P kollineárisak, mert a Thalész-tétel miatt $\angle FPA = 90^\circ = \angle HPA$.

Továbbá ismert, hogy H, M és F kollineárisak: F éppen H tükörképe M -re.

Most jön egy kis szögszámolás: Legyen O a körülírt kör középpontja. Ekkor $\angle OPM = \angle OFM$, hiszen OPF_Δ egyenlőszárú. Viszont $\angle OFM = \angle ODM$, mert F D tükörképe az

OM egyenesre (BC szakaszfelezőjére). Vagyis $ODM \sphericalangle = OPM \sphericalangle$, így $ODPM$ húrnégyszög. Viszont a DPO kör pont SO Thalész-köre, hiszen könnyű meggondolni, hogy az érintés miatt ezen rajta van D és P is.

Vagyis M rajta van SO Thalész-körén $\Rightarrow SMO \sphericalangle = 90^\circ$. Vagyis S az a pont ahol a körhöz P -ben húzott érintő elmetszi az M -ben OM -re állított merőlegest. Ez viszont a BC egyenes így $S = Q$, ezt akartuk megmutatni $\square$

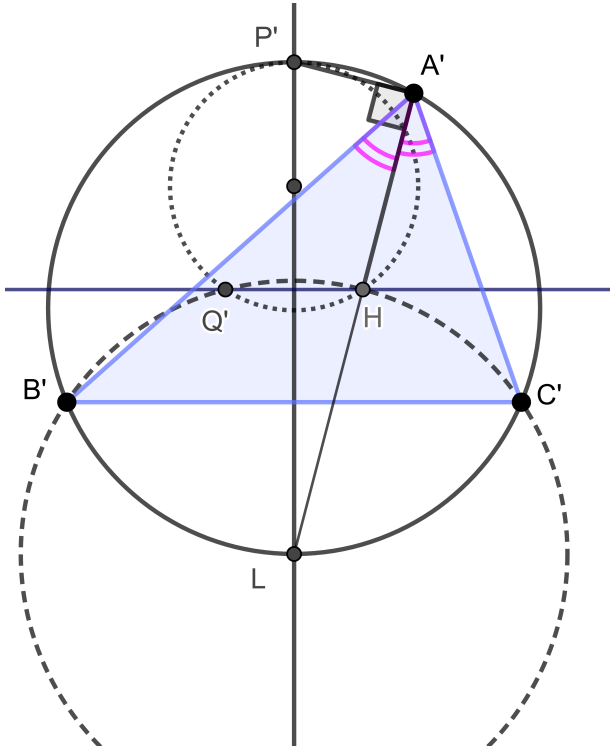
Második megoldás (elmondta Szakács Ábel, leírta Prohászka Bulcsú). Ehhez eleve-
nítsük fel az alábbi, inverzióal tanult (hasonlósággal könnyen bizonyítható) lemmát.

Lemma.

Ha egy I középpontú inverzióal X képe X' és Y képe Y' , akkor $IXY \sphericalangle = IY'X' \sphericalangle$.

Tulajdonképpen elég, ha azt belátjuk, hogy QH érinti a BHC kört, mert mivel Q rajta van az ABC kör és a BHC kör hatványvonalán (a BC egyenesen), ezért a BHC -hez húzott érintők hossza ugyanolyan hosszú, mint az ABC körhöz húzott érintők. (Mint PA .)

Most tehát invertáljunk H -ra. Egy W pont képét mostantól W' -vel jelölöm.



A lemma miatt H éppen $A'B'C'_\Delta$ beírt körének középpontja, hisz rajta van a szögfelezőkön. ($HA'B' \sphericalangle = HBA \sphericalangle = HCA \sphericalangle = HA'C' \sphericalangle$.)

Az ABC kör képe természetesen az $A'B'C'$ kör.

Mi lehet P' ? A lemma szerint az a pont lesz az $A'B'C'$ körön, amire $HA'P' \sphericalangle = 90^\circ$.

A megoldás legfontosabb része, hogy ez a pont a annak a $B'C'$ körívnek a felezőpontja, amin A' is rajta van. Ismert állítás ugyanis, hogy az $A'H$ szögfelező a körülírt kör másik $B'C'$ körívét a felezőpontjában, L -ben metszi (ezt az ívfelező-pontot szoktuk Švrcek-pontnak is nevezni).

A Thalész-tétel miatt, mivel $P'A'L \sphericalangle = 90^\circ$, ezért P az L -lel átellenes pont a körülírt körön, vagyis a másik $B'C'$ ív felezőpontja.

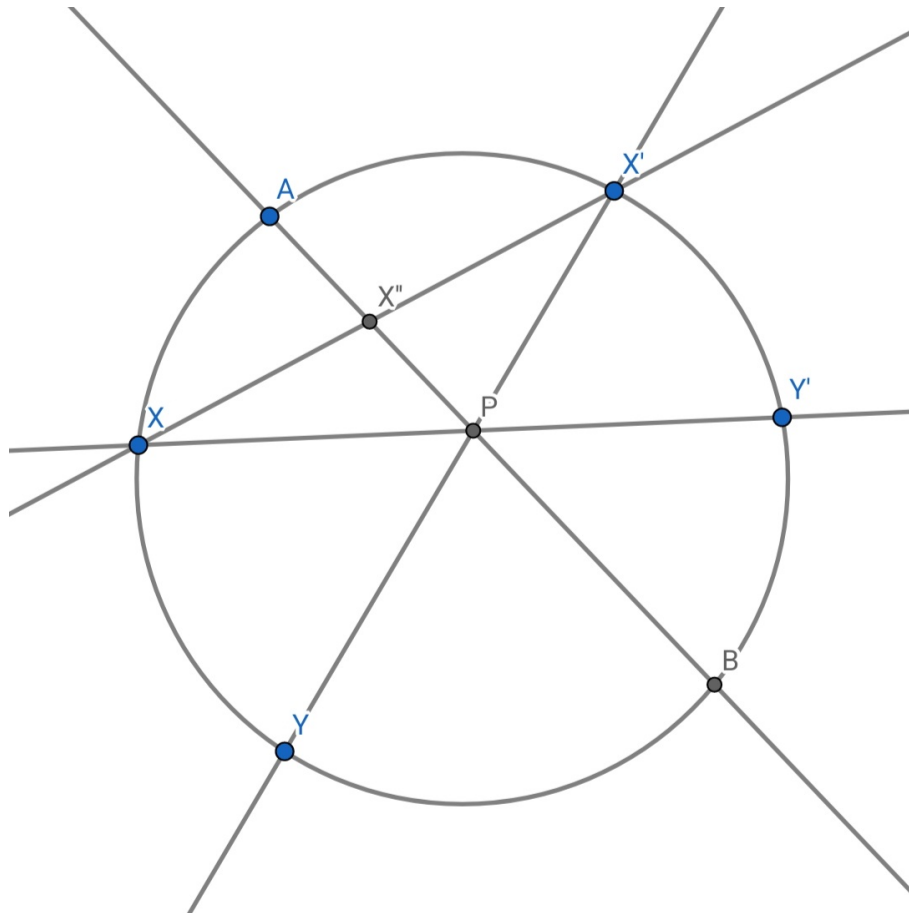
Mi lehet Q' ? Erről azt tudjuk, hogy rajta van a BC egyenes képén, ami a $B'C'H$ kör, valamint hogy rajta van a volt körülírt kört P -ben érintő egyenes képén, vagyis a mostani körülírt kört P' -ben érintő, H -n átmenő körön. A fenti két körnek az a metszéspontja, ami nem H az Q' . Viszont erről a két körrel tudjuk azt, hogy középpontjuk rajta van $B'C'$ felezőmerőlegesén, vagyis hatványvonaluk, ami a $Q'H$ egyenes, a HQ egyenes képe, párhuzamos $B'C'$ -vel ami pedig pont a BHC kör képe. Ez visszainvertálva pont azt jelenti, hogy HQ érinti a BHC kört, ezt akartuk megmutatni, kész vagyunk. $\square$

17. feladat (Simon László)

Legyenek P és Q izogonális konjugáltak az ABC háromszögben. A' pont az ABC háromszög köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívén van úgy, hogy $\angle PA'B = \angle QA'C$. hasonló módon definiáljuk B' és C' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az AA' , BB' és CC' egyenesek egy ponton mennek át.

Megoldás (Veres Dorottya). Először próbáljuk meg megszerkeszteni az A' pontot. Legyen egy projektív transzformáció a következő: A körülírt kör egy pontját P -n keresztül vetítjük a körre, tükrözzük a BC oldal szakaszfelező merőlegesére, majd Q -n keresztül vetítjük a körön. Mivel $\angle BAP = \angle QAC$, ha A -t vetítjük a körre a P és Q pontokból, A két képe szimmetrikus lesz BC szakaszfelező merőlegesére, így a transzformációnak A egy fix pontja. Ugyanígy mivel $\angle PA'B = \angle QA'C$, A' is fixpont.

Lemma. Egy körön adott 2 pont, X és Y . Valamilyen projektív transzformáció őket X' -be és Y' -be vitte a körön. XY' és $X'Y$ metszéspontja P . Ha ennek a transzformációnak a körön fix pontja A , akkor AP második metszéspontja a körrel, B is fixpont.



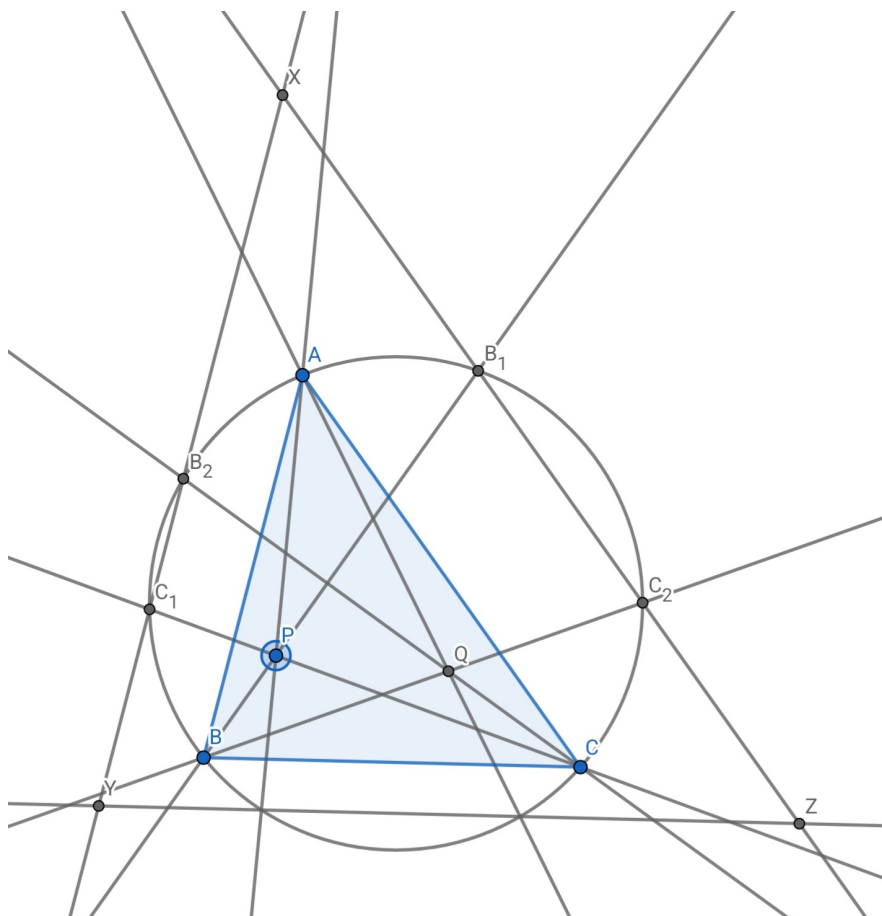
A lemma bizonyítása. Legyen XX' és AP metszéspontja X'' és B képe B' . Vetítsünk először X' -n, utána X -en keresztül. Akkor $(AX, YB) = (AX'', PB) = (AX', Y'B) = (AX', Y'B')$, ebből $B = B'$, B is fixpont. $\square$

Ezen lemma alapján az AA' egyenes megkapható úgy, hogy a feladatban leírt transzformációt elvégezzük két pontra, az egyik pontot összekötjük a másik képével, a másikat az első képével, ezek metszéspontját az A ponttal. Ahol ez A -n kívül metszi a kört, az lesz A mellett a fixpont, vagyis A' .

Legyen a két pont, amiket vetítünk BP második metszéspontja a körrel, ez B^* és CP második metszete a körrel, C^* . Ezek képei BQ második metszete a körrel C'^* és CQ második metszete B'^* (a BC szakaszfelezőre való tükrözés után B -ből C lesz és fordítva).

A $B^*C'^*$ egyenes párhuzamos az AC oldallal, mert $ABB^*\sphericalangle = C'^*BC\sphericalangle$, $AB^* = C'^*C$. Ugyanígy $C^*B'^*$ párhuzamos AB -vel. Ha összekötjük C'^*B^* és B'^*C^* metszetét (ez legyen X) A -val, megkapjuk az AA' egyenest.

A lemmától kezdve ugyanezt elvégezzük a B és C csúcsokra is, ezzel megkapva a BY és CZ egyeneseket. Így YZ párhuzamos BC -vel, XZ egyenes AC -vel, XY pedig AB -vel. ABC és XYZ tehát azonos állású hasonló háromszögek, AX , BY , CZ egy pontban metsz, ahogy AA' , BB' és CC' is. Ezzel az állítást bizonyítottuk.



□

18. feladat (IMO 2020 Shortlist G6, Veres Dorottya)

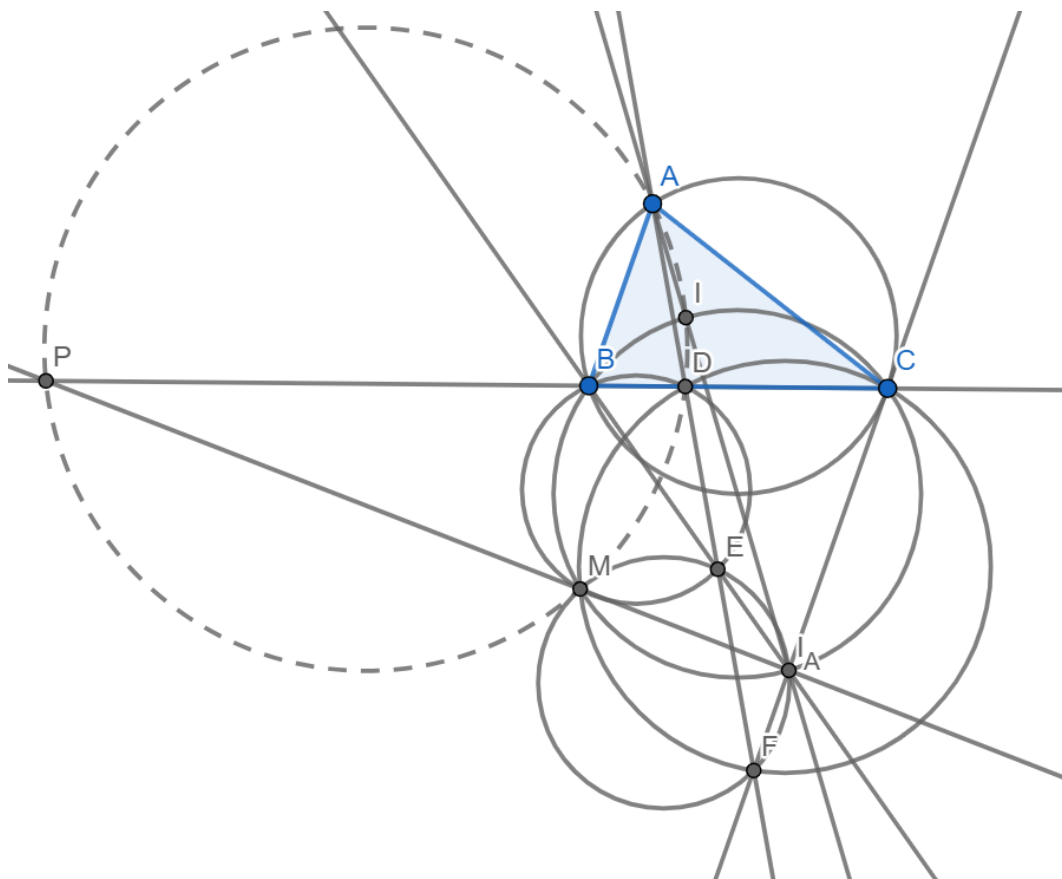
Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I , a BC oldalához tartozó hozzáírt kör középpontja I_A . A beírt kör a BC -t a D pontban érinti. Az AD egyenes BI_A -t és CI_A -t rendre E -ben és F -ben. Bizonyítandó, hogy a körülírt körei AID -nek és EFI_A -nak érintik egymást.

Első megoldás (Szakács Ábel). Legyen M a $CDEI_A$ négyszög Miquel-pontja, belátjuk, hogy az M pontban érinti egymást a két kör. B is rajta van az $ICI_A M$ körön, mert $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90^\circ$. M rajta van az AID körön, mert

$$\angle AIM = 180^\circ - \angle I_AIM = 180^\circ - \angle I_ABM = 180^\circ - \angle EBM = 180^\circ - \angle EDM = \angle ADM$$

Legyen P a BC és $I_A M$ egyenesek metszéspontja. Ekkor P rajta van az $AIDM$ körön, mert

$$\angle IMP = 180^\circ - \angle IMI_A = 90^\circ = \angle IDP$$



Elég belátni, hogy az $MEI_A F$ körben az ME húrhoz tartozó kerületi szög és $AIDMP$ körben az MD húrhoz tartozó kerületi szög összege megegyezik az EMD szöggel:

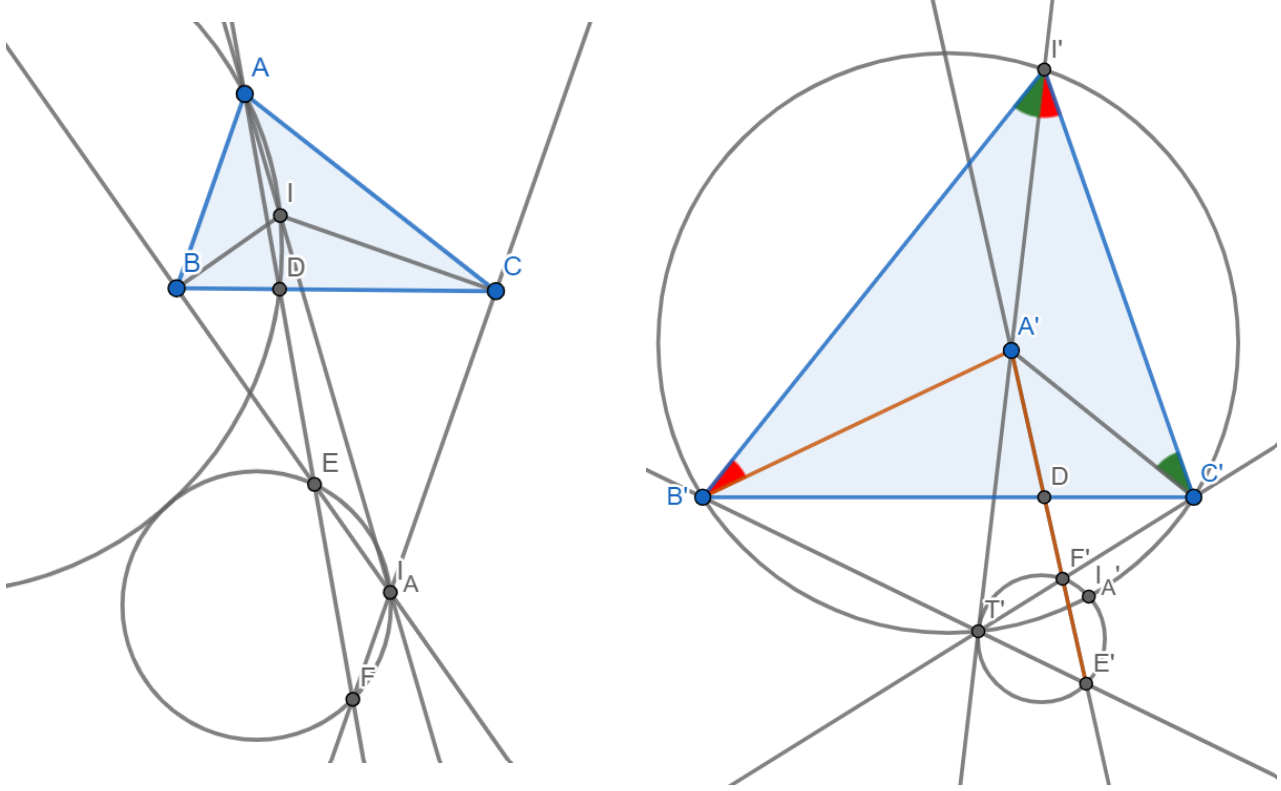
$$\angle EMD = \angle EBD = 180^\circ - \angle I_ABP = \angle BPI_A + \angle BI_AP = \angle MPD + \angle EI_AM$$

Tehát készen vagyunk. □

Második megoldás (Szakács Ábel). Legyenek az ABC háromszög szögei α, β, γ . Invertáljunk egy D középpontú körre. Minden X pontra jelölje X' képét X' . Ekkor

$$\begin{aligned} \angle A'T'C' &= \angle A'T'D + \angle DI'C' = \angle IAD + \angle DCI = \frac{\alpha}{2} - \angle DAB + \frac{\gamma}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \angle DAB = \angle DIB - \angle DAB = \angle DB'I' - \angle DB'A' = \angle A'B'I' \end{aligned}$$

Hasonlóan $\angle A'I'B' = \angle A'C'I'$, így A' éppen az $I'B'C'$ háromszög I' -**Dumpty pontja**. Tehát ha T' I' tükörképe A' -re, akkor $I'T'$ a szimmedián húr.



$$\angle A'E'B' = \angle DE'B' = \angle DBE = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\angle DBA}{2} = 90^\circ - \frac{\angle DA'B'}{2} = 90^\circ - \frac{\angle E'A'B'}{2}$$

Tehát az $A'B'E'$ háromszögben $A'B' = A'E'$. Hasonlóan $A'C' = A'F'$. Az $A'B'I'$ és $A'I'C'$ háromszögek hasonlóak, így $A'T'^2 = A'I'^2 = A'B' \cdot A'C' = A'E' \cdot A'F'$. Azaz ha T' rajta lenne az $E'F'I'_A$ körön, akkor $A'T'$ érintené ezt, innen D középponttal visszainvertálva kapnánk a feladat állítását.

$B'C'I'T'$ harmonikus húrnégyszög, így a $B'I'T'$ háromszögben $B'A'$ súlyvonal, $B'C'$ pedig szimmedián, így $\angle A'B'T' = \angle I'B'C'$. Így

$$\angle A'B'T' = \angle I'B'C' = \angle I'B'D = \angle BID = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \angle A'E'B' = \angle A'B'E'$$

Azaz T' rajta van a $B'E'$ egyenesen. Hasonlóan T' rajta van a $C'F'$ egyenesen is. Végül

$$\begin{aligned} \angle E'I'_A F' &= \angle DF'I'_A - \angle DE'I'_A = \angle DI_A F - \angle DI_A E = \angle EI_A F = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \angle B'I'C' = \angle B'T'C' = 180^\circ - \angle E'T'F' \end{aligned}$$

Tehát $E'I'_A F'T'$ húrnégyszög, ezt akartuk belátni.

□