

9. szakkör

6.2. feladat: Egy kör metszi egy adott O csúcsú ($\alpha < 180^\circ$) szög szarait, egyiket az A és B , másikat a C és D pontban. (Az A pont O és B között, a C pont O és D között van.) Az adott szög felezője a kört az M és az N pontban metszi. (O -hoz az M van közelebb.) Bizonyítsuk be, hogy az AM ív és az ND ív összege egyenlő az MC ív és a BN ív összegével (a szóbanforgó négy ív az α szarai között van)!

7.1. feladat: Egy osztály tanulói névsor szerint állnak egyenes sorban. A testnevelés tanár szeretné mihamarabb nagyság szerinti sorba állítani őket. Ehhez a következőt eszeli ki: kijelöl párokat úgy, hogy minden tanuló legfeljebb egy párban szerepel. Sípszóra ezek a párok helyet cserélnek. Ezután ismét kijelöl párokat (megint mindenki legfeljebb egy párban szerepel), akik újabb sípszóra helyet cserélnek. Ezt addig folytatja, amíg nagyság szerinti sorba nem rendezte őket. Szeretné a legkevesebb sípszóval elérni ezt. Segítsünk neki! Feltesszük, hogy látja a nagyság szerinti sorrendet.

7.2. feladat: Az osztály most moziba megy. Egy sorba szól a jegyük, egymás mellé. Mindenki el is megy a moziba, de egyesével, véletlen sorrendben érkeznek. Ahogy megjönnek, mindenki leül az első üres székre, függetlenül attól, hogy hova szól a jegye. (Az elsőnek érkező az első helyre, stb.) Amikor már mindenki leült, az utolsó helyen ülőnek eszébe jut, hogy ő mégis ott szeretne ülni, ahova a jegye szól. Megnézi, hova szól, és ha épp ott ül, akkor nem tesz semmit. Ha nem oda szól, akkor felállítja azt, aki a helyén ül és helyet foglal. Akit felállított, az most már maga is oda akar ülni, ahova a jegye szól. Két eset van: vagy épp az üres helyre szól a jegye, akkor leül oda, vagy foglalt a helye, akkor felállítja az ott ülőt, és leül a helyére. Ez folytatódik, amíg ahhoz nem érnek, akinek a jegye a még üres helyre szól. Ő is leül a helyére és kezdődhet az előadás. Mennyi a valószínűsége, hogy az első helyen ülőnek nem kell felállnia?

8.1. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$$

8.2. feladat: Igaz-e, hogy tetszőleges hétpontú egyszerű gráf vagy komplementer tartalmaz háromszöget?

8.3. feladat: Mutassuk meg, hogy tetszőleges tízpontú egyszerű gráf tartalmaz háromszöget, vagy komplementere teljes négyszöget!

8.4. feladat: Oldjuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán.

$$\sqrt{\frac{5}{x+2} - 1} + \sqrt{\frac{5}{3-x} - 1} = \sqrt{\left(2 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)^2}$$

9.1. feladat: Egy gulyában két falu 65 tehene legel: vörösek, fehérek, feketék, és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincs öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból!

9.2. feladat: Bizonyítsd be, hogy:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{m} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1} + \dots + \binom{n}{m}\binom{n-m}{0} = 2^m \binom{n}{m}.$$

9.3. feladat: Van-e olyan a és b irracionális szám, amire igaz: a^b irracionális?