

15. szakkör

13.1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéz két alapja a és b hosszúságú, akkor annak az alapokkal párhuzamos szakasznak a hossza, amelyik:

- a) két hasonló trapézra bontja az eredetit
- b) keresztülmegy az átlók metszéspontján
- c) felezi a trapéz területét

ebben a sorrendben megegyezik a és b mértani, harmonikus és négyzetes közepével.

14.2. feladat: Egy 8×8 -as táblázatba számokat írunk, minden sarokba 0-t. Tudjuk, hogy Egyik szám sem nagyobb a vele élszomszédos mezőkbe írt számok számtani közepénél. Milyen számok kerülhettek a maradék 60 mezőbe?

14.3. feladat:

- a) Adott kerületű téglalapok közül melyeknek a legnagyobb a területe?
- b) Egy 10 cm oldalú négyzet alakú kartonpapírból dobozt akarunk hajtogatni úgy, hogy a sarkokból egyforma kis négyzeteket vágunk ki. Mekkora legyen a kivágott négyzetek oldala, hogy a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjuk a hajtogatás után?

14.4. feladat:

- a) Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- b) Legyenek az a, b, c pozitív számok, melyekre $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + c \geq 3abc$.

14.5. feladat: Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma?

15.1. feladat: A malom egy Óxiszon is népszerű kétszemélyes játék, melynek a táblája az eredeti malom játék táblával egyezik meg. Most egyedül játszunk vele: a fekete pontokra minél több egyszínű korongot szeretnénk felrakni úgy, hogy közben ne alakuljon ki malom, azaz egyik egyenes vonalon se legyen három korong. Legfeljebb hány korongot lehet így a táblára helyezni?

15.2. feladat: Egy háromszög mindegyik oldalán kijelölünk két-két pontot úgy, hogy a hat pont egy olyan hatszög hat csúcsa legyen, amelynek minden oldala egyenlő, és szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög területének a kétharmad része!

15.3. feladat: Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám.