

17. szakkör

14.2. feladat: Egy 8×8 -as táblázatba számokat írunk, minden sarokba 0-t. Tudjuk, hogy Egyik szám sem nagyobb a vele élszomszédos mezőkbe írt számok számtani közepénél. Milyen számok kerülhettek a maradék 60 mezőbe?

14.4. feladat:

a) Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) Legyenek az a, b, c pozitív számok, melyekre $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + c \geq 3abc$.

14.5. feladat: Egy körön kijelölünk 2022 különböző pontot, és mindegyikhez hozzárendelünk egy egész számot úgy, hogy mindegyik nagyobb, mint az óramutató járásával ellentétes irányban az őt megelőző két szám összege. Mennyi lehet a pontokhoz rendelt pozitív egészek számának maximuma?

15.2. feladat: Egy háromszög mindegyik oldalán kijelölünk két-két pontot úgy, hogy a hat pont egy olyan hatszög hat csúcsa legyen, amelynek minden oldala egyenlő, és szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének a kétharmad része!

15.3. feladat: Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám.

16.1. feladat: Adott egy hegyesszög és a szárai között egy P pont. Szerkeszd meg azt a PQR háromszöget, amelyiknek a kerülete minimális, továbbá a Q pont az egyik, az R pont pedig a másik szögcsúcsra illeszkedik!

16.2. feladat: Bizonyítsd be, hogy ha egy szabályos háromszög belsejében veszünk egy P pontot, akkor az oldalaktól vett távolságösszeg mindig állandó.

16.3. feladat: Egy ABC háromszög belsejében keressük azt a P pontot, melynek az oldalaktól vett távolságösszege minimális. Hol lehet ez a P pont, ha tudjuk, hogy a háromszög minden szöge kisebb, mint 120° ?

Arany Dániel Matematikaverseny

Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelynek létezik három olyan $a > b > c$ pozitív osztója, hogy

$$a^2 - b^2, \quad b^2 - c^2, \quad a^2 - c^2$$

is osztója n -nek.

(7 pont)

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC = BC$ és $AB < AC$. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontját a BC oldalon jelöljük D -vel. Az AD egyenes az (A -tól különböző) E pontban metszi a háromszög körülírt körét, az AB oldal felezőmerőlegese pedig az L pontban metszi AD -t. A BL egyenes az AC oldalt az M , az ABC háromszög körülírt körét pedig az N pontban metszi. Továbbá az EN egyenes és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontja Z . Bizonyítsuk be, hogy $MZ \perp BC$.

(7 pont)

3. Dániel gyümölcssalátát készít. A salátába alma, banán, citrom, dinnye és eper kerülhet.

- Az alma, banán, dinnye és eper ára darabonként 1 fabatka;
- egy darab citrom ára 2 fabatka;
- dinnyéből és eperből csak egy-egy darab van már a zöldségesnél, míg almából, banánból és citromból tetszőlegesen sok kapható.

Dániel n fabatkányi (n pozitív egész) pénzét teljesen elkölthetve hányféleképpen vásárolhat gyümölcsöt?

(Például ha $n = 2$, akkor 9-féleképpen vásárolhat, hiszen (az egyes gyümölcsöket a kezdőbetűjükkel rövidítve) a lehetőségek: AA, AB, AD, AE, BB, BD, BE, C, és DE.)

(7 pont)