## 2003. szeptember 19.

1. A kör alakú Kincses sziget partján áll hat pálmafa, jelölje ezeket $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. Az $ABC$ háromszög magasságpontja $M$, a $DEF$ háromszög magasságpontja $N$. Az $MN$ szakasz felezőpontjában ásták el a kalózok a kincset. Sajnos legközelebb visszaérkezve már senki nem emlékezett rá, melyik fát melyik betű jelölte. Hány helyen kell kincskeresésbe fogni a feledékeny kalózoknak?

2. Egy $n\times n$-es táblázat mezőibe beírtunk $n^2$ db. adott, különböző valós számot. Minden sorban bekarikáztuk a legkisebbet, minden oszlopban bekarikáztuk a legnagyobbat. Hány olyan elrendezés van, ahol éppen $2n$ db. számot karikáztunk be?

3. Egy tetraéder kitérő éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok páronként merőlegesek. Igazoljuk, hogy a tetraéder magasságai ugyanakkorák.

4. „Csupaegy”-nek nevezünk minden olyan tízes számrendszerbeli pozitív egészt, melynek minden jegye 1. Mely $m$-ekre létezik $m$ db. olyan „csupaegy” szám, melyek $m$-es maradékai mind különbözők?

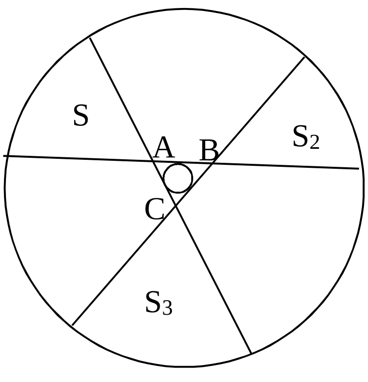
5. Az $u$, $v$ valós számokról tudjuk, hogy $u$, $v$ és $uv$ egy rac, együtthatós polinom három gyöke. Igaz-e, hogy $uv$ racionális?

6. A $k$ kör belsejében levő $A$ és $B$ pontok a középpontra szimmetrikusak. Legyen $P$ a $k$ körön kívül, . A $PA$ átmérőjű kör $k$-t az $M$ és $N$ pontokban metszi. Igazoljuk, hogy .

## 2003. október 31.

1. Egy bajnokságon nyolc futballcsapat vesz részt. Minden egyes csapat pontosan egyszer játszik minden csapattal, nincsenek döntetlenek. Bizonyítsa be, hogy a bajnokság végén lehet találni négy csapatot (legyenek $A$, $B$, $C$ és $D$) úgy, hogy $A$ legyőzte $B$-t, $C$-t és $D$-t, $B$ csapat $C$-t és $D$-t, $C$ pedig $D$-vel játszott meccsén diadalmaskodott!

2. (a) Melyik a legkisebb pozitív egész, melynek az 5-ös, 6-os és 7-es számrendszerben felírt alakjában a jegyek összege rendre 5, 6, 7?
(b) Melyik a legkisebb pozitív egész, melynek a 4-es, 5-ös és 6-os számrendszerben felírt alakjában a jegyek összege rendre 5, 6, 7?

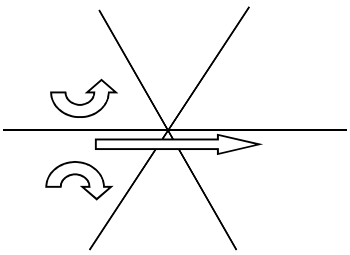



3. Egy osztály minden egyes tanulója a következő feladatot kapja: „Vegyünk két koncentrikus, 1 és 10 egységnyi sugarú kört! A kisebbik körhöz húzzunk három érintőt, melyeknek $A$, $B$ és $C$ metszéspontjai a nagyobbik kör belsejében vannak. Mérjük meg az $ABC$ háromszög $S$ területét és az $S_1$, $S_2$, $S_3$ körcikkszerű, $A$, $B$, $C$ csúcsú területeket is, majd számítsuk ki $S_1+S_2+S_3-S$ értékét.”
Igazolja, hogy minden tanuló ugyanazt az eredményt kapja!

4. Legyenek $a$ és $b$ pozitív egészek. Igazoljuk, hogy végtelen sok pozitív egész szám nem áll elő $a+b+6ab$ alakban!

5. Legyen , ($n$ nemnegatív egész).
   (a) Igazoljuk, hogy , ha $n>0$.
   (b) Mutassuk meg, hogy ha $i$ és $j$ különböző, akkor .
   (c) Hogyan bizonyíthatjuk ezek után, hogy végtelen sok prím van?

6. Mely egész $x$ esetén lesz $x^4+x^3+x^2+x+1$ négyzetszám?



7. Egy város utcái háromféle irányúak és a várost egyenlő területű szabályos háromszögekre osztják. A kereszteződésekben a forgalom csak egyenesen, 120°-kal jobbra vagy balra haladhat tovább az ábrán látható módon.
Kizárólag a kereszteződésekben szabad kanyarodni. Két autó áll egy kereszteződésben. Az egyik elindul valamelyik szomszédos kereszteződés felé, és amikor eléri, a második kocsi is kezd haladni felé. Ettől a pillanattól fogva azonos sebességgel mozognak, ám nem feltétlenül kanyarodnak ugyanarra. Előfordulhat-e, hogy valamikor találkoznak?

8. „A sziszifuszi munka”: Egy dombra felvezető lépcső 1001 fokból áll, közülük néhányon egy-egy szikla található. Sziszifusz felemel egy sziklát az egyik fokról, majd a fölötte levő legközelebbi üres fokra cipeli. Ezután ellenfele, Kisördög egy fokkal lejjebb gurít egy sziklát, amelynek a lépcsőfoka alatt közvetlenül üres fok következik. A lépcsőn található összesen 500 szikla a legalsó 500 lépcsőfokon helyezkedik el egyesével. Sziszifusz és Kisördög felváltva jönnek, Sziszifusz kezd. Célja, hogy a legfelső fokra tegye az egyik sziklát. Megakadályozhatja ezt Kisördög?

Házi feladat:
Mely egész $(x,y)$ számpárokra igaz, hogy $x^3+y^3=2xy+8$?

Az év során jó lenne átismételni a korábbi olimpiák feladatait az érdeklődő diákoknak. Most az első három olimpia anyaga az első átnézendő rész.

## 2003. november 14.

A szakkör első 30 percében a házi feladattal kapcsolatosan 4 kérdésre lehetett válaszolni:

1. Sorold fel az egész megoldásait a következő egyenletnek: $x^3+y^3=2xy+8$.

2. Melyik a legnagyobb 100-nál kisebb $n$ egész, melyre a következő tört egyszerűsíthető: .

3. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: .

4. Egy háromszög oldalait jelölje $a$, $b$, $c$ területét $T$.
   (a) Melyik a max. $k$, amelyre ez mindig teljesül? (b) Melyik a max $k$, amelyre ez minden derékszögű háromszögre teljesül?

(Aki a házi feladatot elkészítette és átnézte az első három olimpia feladatait, annak nagy előnye volt, lásd 59/1, 60/2, 61/2. 4 jó válasz: Kocsis Albert Tihamér, Maga Péter, Pach Péter Pál, 3 jó válasz: Czank Tamás, Egri Attila, Kiss Tóth Christian, Mészáros Tamás, Pongrácz András, Rácz Béla András, Zanaty Péter )

5. Az *ABCD* paralelogramma *AB* oldalán úgy jelöljük ki az *X* és a *BC* oldalán az *Y* pontot, hogy *AX*=*CY* teljesüljön; az *AZ* és *CX* egyenesek metszéspontját jelölje *P*. Bizonyítsuk be, hogy a *DP* egyenes felezi a paralelogramma *D*-nél levő szögét.

6. Az *ABC* háromszög *AB*-vel párhuzamos középvonalának egyenese az *A*-ból és a *B*-ből induló magasságvonalakat rendre *D*-ben és *E*-ben metszi. Az *AC*-vel párhuzamos középvonalának egyenese az *A*-ból és a *C*-ből induló magasságvonalakat rendre *F*-ben és *G*-ben metszi. Igazoljuk, hogy *DC*, *BF* és *GE* párhuzamosak.

7. Az *ABC* háromszög *BC* oldalának pontjai *M* és *N*. . Igazoljuk, hogy .

8. Igaz-e, hogy azok a 2003 jegyű számok, melyeknek 2002 jegye 1-es egy pedig 7-es, azok mind prímek?

9. A hegyesszögű *ABC* háromszög mely *P* pontjára lesz a következő kifejezés minimális: $aPA+bPB+cPC$?

Házi feladat:

10. Az $a_1, a_2, \dots, a_r$ és a $b_1, b_2, \dots, b_r$ számok az 1, 2, …, *r* számok valamilyen sorrendben. Igazoljuk, hogy az $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_rb_r$ számok között van két olyan, melyek különbsége osztható *r*-rel, ha (a) r=61; (b) ha *r*=60.

11. Az *ABC* háromszög köré írt kör sugara *R*. Igazoljuk, hogy .

Az év során jó lenne átismételni a korábbi olimpiák feladatait az érdeklődő diákoknak. Most a következő három olimpia anyaga (62-64) az átnézendő rész.

## 2003. november 28.

A szakkör első 30 percében a házi feladattal kapcsolatosan 3 kérdésre lehetett válaszolni:

1. Az *ABCD* szabályos tetraéder éleinek hossza 1. Két azonos sebességű hangya végigfut az *ABC* és *DAC* háromszögek élein, ezt a körüljárást tartva. A két hangya által meghatározott szakasz felezőpontja által leírt vonal milyen hosszú?

2. Mennyi a pontos értéke a következő kifejezésnek: ?

3. 5 egyenes szögfelezőinek legfeljebb hány metszéspontja lehet? (Nem kell bizonyítani, hogy a max. valóban létre is jöhet.)

A házi feladatként ismétlendő olimpiák anyagaiból nagy segítséget jelentett ezeknek megoldásához a 62/3, 63/5, 64/5 feladatok.

3 jó válasz: Kocsis Albert Tihamér, Pach Péter Pál, Rácz Béla András

2 jó válasz: Hablicsek Márton, Kórus Péter, Paulin Roland, Czank Tamás, Egri Attila, Gosztonyi Balázs, Birkner Tamás, Mánfay Máté, Horváth Márton

4. Adott a síkon 10 pont úgy, hogy bármely öt között található négy, melyek egy körön vannak. Igazoljuk, hogy ekkor legalább 9 pont egy körön van.

5. Egy telefontársaság kapcsolótábláján 400 kimenet van. Bármely kettőt összeköti egy vezeték, mely kék vagy piros. A piros és kék vezetékek száma megegyezik. A rendszer megbénul, ha két azonos színű drótot elvágunk, melyeknek nincs közös végpontja. Mutassuk meg, hogy a konkurens cég technikai banditái ugyanannyiféleképpen béníthatják meg a rendszert két piros elvágásával, mint két kék elvágásával.

6. Határozzuk meg az összes olyan $x$, $y$ poz. eg. számokat, melyekre .

7. Az $ABC$ háromszög oldalaira kifele rajzoltuk az $ABDE$, $BCFG$, $CAHI$ téglalapokat. Igazoljuk, hogy a $DG$, $FI$, $HE$ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

Házi feladat:

8. A Bergengóc parlament tagjainak száma 1600. A legfontosabb ügyek tárgyalását 16 000 bizottság végzi, mindegyik 80 fős. Mutassuk meg, hogy kiválasztható két bizottság úgy, hogy 4 közös tagjuk legyen.

Az év során jó lenne átismételni a korábbi olimpiák feladatait az érdeklődő diákoknak. Most a következő három olimpia anyaga (65-67) az átnézendő rész.

## 2003. december 12.

A szakkör első 30 percében a házi feladattal kapcsolatosan 3 kérdésre lehetett válaszolni:

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldásást:

$$1234x-5y-6z-7v=0$$
$$-x+234y-56z-7v=0$$
$$-12x-3y+456z-7v=0$$
$$-x-2y-3z+7654v=0$$

2.

…

…

A fenti egyenletekben szereplő $a_k$ ($k$=1, 2, 3, 4, 5) számok nem mind nullák, de minden $c_s$ értéke 0, ahol $s$ 7-nek hatványa. Adjuk meg $c_{2003}$ lehetséges értékeit.

3. Egy $n$ ($n$>1) napig tartó versenyen $m$ érmet osztottak ki. Az első napon 1 érmet és a maradék ötödét, a második napon 2 érmet és a maradék ötödét és így tovább. Végül az $n$. napon éppen $n$ érem maradt és ezeket kiosztották. Határozzuk meg $n$ és $m$ értékét.

A házi feladatként ismétlendő olimpiák anyagaiból nagy segítséget jelentett ezeknek megoldásához a 65/2, 67/5, 67/6 feladatok.

3 jó válasz: Kocsis Albert Tihamér, Rácz Béla András, Birkner Tamás, Czank Tamás, Maga Péter

2 jó válasz: Hablicsek Márton, Pach Péter Pál, Kiss Tóth Christian, Egri Attila, Király Csaba, Pongrácz András

4. Legyenek $a$, $b$ pozitív valósak, $n$ pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy

.

5. Az *ABCD* és az *AB'C'D'* azonos körüljárású négyzetek. Igazoljuk, hogy a *BB'*, *CC'*, *DD'* egyenesek egy ponton mennek át.

6. Álljon a *H* halmaz véges sok olyan természetes számból, amelyeknek nincs 3-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy a *H*-beli számok reciprokainak az összege 3-nál kisebb.

7. Jelölje egy tetszőleges konvex $n$-szög oldalait $a_1, a_2, \ldots, a_n$; belső szögeit ,
területét pedig $t$. Mely $n$ értékekre igaz bármely konvex $n$-szög esetén, hogy
?

8. Tekintsünk egy kör három pontja által meghatározott három diszjunkt körívet. Mindegyik ív felezőpontja körül megrajzoljuk a végpontjain áthaladó kört. Bizonyítsuk be, hogy a kapott három kör egy ponton halad át.

Házi feladat:

9. Legyen $n$ rögzített pozitív egész szám. Adjuk meg az

egyenletnek az összes olyan megoldását a valós számok körében, ahol minden $i$-re teljesül.

## 2004. január 9.

A házi feladat megbeszélése után megoldottuk az OKTV II. kategória 2. fordulójának a feladatait, továbbá diofantikus egyenletek megoldási stratégiáival ismerkedtünk. OKTV példák:

1. Jelentsen $n$ 1-nél nagyobb egészt. Melyik nagyobb $A$, vagy $B$?

$$A=\frac{\sqrt{n+1}}{n}+\frac{\sqrt{n+4}}{n+3}+\frac{\sqrt{n+7}}{n+6}+\frac{\sqrt{n+10}}{n+9}+\frac{\sqrt{n+13}}{n+12}.$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+5}}+\frac{1}{\sqrt{n+8}}+\frac{1}{\sqrt{n+11}}.$$

2. Az *ABC* háromszögben $\alpha \geq 90°$. $r$ a beírt, $R$ a köréírt kör sugara, az oldalak $a$, $b$, $c$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{r}{R} \leq \frac{a\sin\alpha}{a+b+c}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $p$ valós paraméter, amelyre az $x^3+2px^2+2p^2x+p=0$ egyenletnek három különböző valós gyöke van.

4. Az *ABCD* húrnégyszögben *AB*=2*AD* és *BC*=2*CD*; ismert továbbá az *A*-nál levő $\alpha$ szög mértéke és az *AC* átló $d$ hossza. Fejezzük ki a négyszög területét $\alpha$-val és $d$-vel.

(szorzattá alakítás)

5. $(xy-7)^2=x^2+y^2 \qquad x,y\in \mathbb{Z}$

6. $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1 \qquad x,y\in \mathbb{Z}$

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=n$ egyenletnek hány megoldása van a pozitív egészek körében, ha (a) $n$=2004; (b) ha $n$ tetszőleges pozitív egész?

8. Legyen $p$ 3-nál nagyobb prím, keressük a pozitív egész megoldásait a következő egyenletnek: $x^3+y^3+z^3-3xyz=p$.
(egyenlőtlenség, nagyság szerinti sorrend)

9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$ $\quad x,y,z\in \mathbb{Z}^+$

10. Lehet-e nyolc szomszédos köbszám összege is köbszám? (paraméterezés)

11. Igazoljuk, hogy végtelen sok megoldása van: $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2$.
(oszthatósági vizsgálat, a modulus megtalálásához segítenek az együtthatók, vagy a kitevők)

12. $x^5-y^2=4 \quad x,y\in \mathbb{Z}$

Házi feladat

1. $x^3+y^3=xy+61 \quad x,y\in \mathbb{Z}^+$

2. $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3 \quad x,y\in \mathbb{Z}$

3. Igazoljuk, hogy végtelen sok egész megoldása van $x^2=y^3+z^5$.

4. Mely $p$, $q$ prímekre teljesül, hogy $p^3-q^5=(p+q)^2$ ?

## 2004. január 23.

A házi feladat megbeszélése után a szakkörön a komplex számokkal barátkoztunk. Azok kedvéért, akik már jártasabbak a témában feladtam három nehezebb problémát (1-3.), majd következett egy kis áttekintés a legszükségesebb ismeretekről. A fogalmak és műveletek jobb megértéséhez is adtam gyakorló feladatokat (4-7.)

1. Határozzuk meg a következő összeg értékét: $\binom{2004}{0}+\binom{2004}{3}+\binom{2004}{6}+\ldots+\binom{2004}{2004}$.

2. Egy kör kerületén vannak az *AA'BB'CC'DD'* nyolcszög csúcsai. Az *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* ívek ugyanolyan hosszúak. Legyenek *P*, *Q*, *R*, *S* rendre az *AB* és *A'B'*, *BC* és *B'C'*, *CD* és *C'D'*, *DA* és *D'A'* húrok metszéspontjai. Igazoljuk, hogy *PQRS* paralelogramma.

3. Az *ABC* háromszög csúcsaiba mutató komplex számokat jelölje *a*, *b*, *c*. Igazoljuk, hogy a háromszög előjeles *t* területére teljesül, hogy $4ti=(c-a)(\overline{b}-\overline{a})-(\overline{c}-\overline{a})(b-a)$.

4. Mit szólsz a következőhöz $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$.

5. Írjuk fel $a+bi$ alakban a következő műveletek eredményét: (a) $(1+i)(3-2i)$; (b) $(1+i)/(3-2i)$; (c) $(5+8i)^{20}(5+8i)^{19}$; (d) $1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+...+(1+i)^7$.

6. Oldjuk meg a következő egyenleteket: (a) $x^2+2x+2=0$; (b) $x^2+(1+i)x+5i=0$.

7. Hol vannak a komplex számsíkon azok a $z$-k, melyekre: (a) $\mathrm{Im}(3i-5z)=7$; (b) $|z-3+8i|\le 1$; (c) $|z|=2\,\mathrm{Im}\,z$; (d) $|z-5i|\ge|z+i|$.

Házi feladat

1. Egy kör kerületén vannak az *AA'BB'CC'* hatszög csúcsai. Az *AA'*, *BB'*, *CC'* húrok olyan hosszúak, mint a kör sugara. Igazoljuk, hogy az *A'B*, *B'C* és *C'A* szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

2. Az *ABC* háromszög köréírt körével koncentrikus a *k* kör, ennek egy tetszőleges pontja *M*. *M*-ből merőlegeseket bocsátunk a háromszög oldalegyeneseire, ezek talppontjai *A'*, *B'*, *C'*. Igazoljuk, hogy az *A'B'C'* háromszög területe nem függ *M* helyzetétől.

## 2004. február 6.

Ezt a szakkört Zábrádi Gergely tartotta. A polinomok játszották a főszerepet.

1. Léteznek-e olyan különböző $a_1, a_2, ..., a_n$ egész számok úgy, hogy $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+1=p(x)q(x)$, ha (a) $p$ és $q$ egész együtthatós polinomok. (b) $p$ és $q$ racionális együtthatós polinomok. ($p$ és $q$ legalább elsőfokúak.)

2. $p$ és $q$ páratlan egészek. Lehet-e az $x^2+2px+2q$ polinomnak (a) egész, (b) racionális gyöke?

3. $p(x)$ és $q(x)$ WWW együtthatós polinomok. Létezik $r(x)$ valós együtthatós polinom, amelyre $p(x)=q(x)r(x)$ Következik-e, hogy $r(x)$ is WWW együtthatós, ha (a) WWW=racionális, (b) WWW= egész? Mi lehet WWW, hogy következzen?

4. Kezdő és Második felváltva írják be az együtthatókat a következő egyenletbe. Kezdő nyer, ha 3 valós gyök lesz, különben Második. Kinek van nyerő stratégiája? $x^3+\mathbf{K}\,x^2+\mathbf{K}\,x+\mathbf{K}=0$ .

5. Mutassuk meg, hogy az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$ polinomnak racionális $t/s$ alakú gyökeire teljesül, hogy $t$ osztója $a_0$-nak, $s$ osztója $a_n$-nek, ha $(t,s)=1$.

6. $p(x)$ és $q(x)$ egész együtthatós primitív polinomok (együtthatóik relatív prímek). Bizonyítsuk be, hogy $p(x)q(x)$ is primitív.

7. (Gauss lemma) Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész együtthatós polinom felbontható két racionális együtthatós polinom szorzatára, akkor két egész együtthatós polinom szorzatára is felbontható.

8. $p(x)$ egész együtthatós. $p(0)=p(1)=1$. Bizonyítsuk be, hogy $p(x)$-nek nincs egész gyöke.

9. Egy racionális együtthatós harmadfokú polinomnak nincs valós gyöke. Bizonyítsuk be, hogy irreducibilis.

Házi feladat

1. Mutassuk meg, hogy egy páros fokú páratlan együtthatós polinomnak nem lehet racionális gyöke.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 1 főegyütthatójú n-edfokú polinom végtelen sok helyen egy egész szám n-edik hatványa, akkor egy elsőfokú polinom n-edik hatványa.

3. Legyen $f_k(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!}$. Igazoljuk, hogy minden olyan racionális együtthatós polinom, ami minden egész helyen egész értéket vesz fel, az felírható $b_0 + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + ... + b_n f_n(x)$ alakban. ($b_0$, $b_1$, …, $b_n$ egészek.)

## 2004. február 20.

A házi feladatok megbeszélése után geometriai egyenlőtlenségeket vizsgáltunk.

1. Igazoljuk, hogy a háromszög szögeit radiánban mérve a szokásos jelölésekkel:

$$\frac{p}{3} \le \frac{a a + b b + c g}{a+b+c} < \frac{p}{2}.$$

2. Közismert, hogy a háromszög köréírt és beírt körének sugaraira *R* legalább 2*r*. Milyen konstans lesz a 2 helyett, ha tetraéder köréírt és beírt gömbjének sugarait vizsgáljuk?

3. Igazoljuk, hogy a háromszög magasságainak, szögfelezőinek és súlyvonalainak összegére:

$$9r \le \sum_{i=a,b,c} m_i \le \sum_{i=a,b,c} f_i \le \sum_{i=a,b,c} s_i \le \frac{9}{2}R.$$

4. Egy háromszögben *AB*=5, *BC*=4. Mekkora lehet a háromszög legnagyobb és legkisebb szöge?

5. Mekkora az a maximális sugarú kör a sakktáblán, amely egyetlen fehér mezőbe sem metsz bele?

Házi feladat

1. Rajzoljunk egy kör köré egy háromszöget és egy négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet kerületének több, mint fele a háromszög belsejébe esik.

2. Igazoljuk, hogy a háromszög szögfelezőinek összegére, és a hozzáírt körök sugaraira:

$$\sum_{i=a,b,c} f_i \le \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \le r_a + r_b + r_c = r + 4R.$$

## 2004. március 5.

Az előző napon lezajlott OKTV döntő feladatait oldottuk meg az II. és III. katagóriában.

## 2004. március 9.

Ezen a napon volt az első olimpiai válogatóverseny. A feladatok a következők voltak:

1. Egy hóbortos zöldséges csak három fajta gyümölcsöt árul, almát, körtét és narancsot. Egyszerre csak egyetlen szem gyümölcsöt vehetünk, de hajlandó egy vásárlót napjában több alkalommal is kiszolgálni. Az árak is furcsák: egy alma éppen annyi tallér, ahány körte van még a boltban. Egy körte kétszer annyi tallér, mint ahány narancs van a boltban. Egy narancs éppen háromszor annyi tallér, mint ahány alma van a boltban.

Furfangos Frigyes egy reggel kifigyelte, hogy a boltban az almák, körték és narancsok száma éppen $a$=6, $k$=7, $n$=3. Szeretné megvásárolni mind a 16 darabot. Legkevesebb hány tallérra van szüksége Frigyesnek és milyen sorrendben vásárolja meg a gyümölcsöket? (Feltételezzük, hogy aznap más vásárló nem volt.) Határozzuk meg a szükséges összeget általában is $a$, $k$, $n$ függvényében!

2. Az $ABC$ háromszögben $AC=BC$, a beírt kör középpontja $K$. Legyen $P$ az $AKB$ háromszög köré írt kör olyan pontja, mely az $ABC$ háromszög belsejében van. $P$-n át párhuzamosakat húzunk az $AC$ és $BC$ szárakkal. Ezek $AB$-t rendre a $D$ és $E$ pontokban metszik. Párhuzamost húzunk $P$-n át $AB$-vel is, ez $AC$-t és $BC$-t rendre az $F$ és $G$ pontokban metszi.
Igazoljuk, hogy a $DF$ és $EG$ egyenesek metszéspontja az $ABC$ köré írt körön van!

3. Egy pozitív egész számot közvetlenül egymás után kétszer leírva „dupla” számot kapunk. (Pl dupla szám a 357357, amit a 357-ből kaptunk.) Bizonyítsuk be, hogy a négyzetszámok között végtelen sok „dupla” szám van!

## 2004. március 19.

1. Egy pontból induló négy félegyenes egy féltérbe mutat. Igazoljuk, hogy el lehet metszeni egy síkkal úgy, hogy a kialakuló konvex négyszög paralelogramma legyen.

2. Van-e a természetes számoknak két olyan végtelen részhalmaza $A$ és $B$, hogy minden n természetes szám egyértelműen álljon elő egy $A$-beli és egy $B$-beli szám összegeként?

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a_n$, $b_n$ ($n$=1, 2, …, $N$) valós számokból álló szám $N$-esekre van olyan valós $x$, amelyre $\sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = 0$ teljesül.

4. Bizonyítsuk be, hogy az $x+y+2z+2t=a$ és $2x–2y+z–t=b$ egyenletrendszernek tetszőleges ($a$, $b$) egészekre van egész megoldása.

5. Egy részeges ember nagyon szereti a sört, minden nap legalább egy korsóval megiszik; továbbá minden nap egész számú korsóval iszik. Minden héten 12 korsót fogyaszt el. Bizonyítsuk be, hogy van néhány egymást követő nap, amelyeken összesen 20 korsónyi sört iszik meg.

6. Létezik-e a természetes számoknak olyan nemkonstans végtelen sorozata, amelyben a második elemtől kezdve minden elem a két szomszédjának a harmonikus közepe?

## 2004. április 2.

A márciusi válogatóverseny feladatainak megoldásait részletesen megbeszéltük. További feladatok:

1. Tekintsük a $H=\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes $r$ elemű részhalmazát. Mindegyikből kiválasztjuk a legkisebb elemet. Ezek számtani közepét jelölje $F(n,r)$. Igazoljuk, hogy $F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$.

2. Legyen $T_n$ az $\{1, 2, .., n\}$ halmaz azon $S$ nem-üres részhalmazainak a száma, ahol az $S$-beli elemek átlaga egész szám. Mutassuk meg, hogy $T_n–n$ mindig páros szám.

3. Legyen $p(n,k)$ az (1, 2, …, $n$) számok azon permutációinak száma, amelyekben $k$ fixpont van. Igazoljuk, hogy $\sum_{k=0}^{n} k \cdot p(n,k) = n!$ .

4. Legyen $H$={1, 2, …, 2001} és jelölje $H$ azon részhalmazainak számát $S$, melyekben az elemek összege páros. Jelölje továbbá $H$ azon részhalmazainak számát $D$, melyekben az elemek összege páratlan. Melyik nagyobb és mennyivel $S$, vagy $D$?

## 2004. április 16.

Az alábbi feladatok néhány évvel ezelőtt a kínai OKTV döntőben szerepeltek.

1. Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben $C$-nél nagyobb szög van, mint $B$-nél. A $D$ pont a $BC$ oldalon van, az $ADB\angle$ tompaszög. Az $ABD$ háromszög magasságpontja $H$. Az $ABD$ köré írt körön és $ABC$ háromszögön belül van $F$. Igazoljuk, hogy $F$ az $ABC$ magasságpontja akkor és csak akkor, ha $HD$ és $CF$ párhuzamos és $H$ az $ABC$ köré írt körön van.

2. Legyen $a$ egy valós szám. Definiáljuk polinomok egy sorozatát: $f_0(x)=1$ és $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_n(ax)$ ($n$=1, 2, …). Igazoljuk, hogy $f_n(x) = x^n f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ ($n$=0, 1, 2, …).
   Határozzuk meg a polinomokat explicit módon is.

3. Legyen $m$ pozitív egész. Igazoljuk, hogy vannak olyan $a$, $b$, $k$ egészek, melyekre $a$ és $b$ páratlan, $k$ nem negatív és $2m = a^{19} + b^{99} + k \cdot 2^{1999}$.

4. Határozzuk meg a legnagyobb $l$ számot úgy, hogy amennyiben az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ minden gyöke nem negatív, akkor $f(x) \geq l(x-a)^3$ teljesül minden nem negatív $x$ esetén.

5. Egy 4×4×4-es kocka 64 egységkockából épül fel. Ezek közül 16 piros. Egy színezés „változatos”, ha minden 1×1×4-es részen belül pontosan egy piros van. Hány „változatos” színezés van? A forgatások egymásutánjával azonos helyzetbe hozható színezéseket különbözőnek tekintjük.

## 2004. április 30.

Ezen a szakkörön a Turán verseny feladatait beszéltük meg:

1. Egy $n\times n$-es táblázat mezőibe az 1, 2, …, $n^2$ számokat írtuk, mindegyiket egyszer. Vegyünk két azonos sorban, vagy oszlopban levő számot és tekintsük a nagyobb és a kisebb hányadosát. Tekintsük az összes lehetséges $n^2(n-1)$ ilyen számpárból származó törteket, legyen ezek közül a legkisebb a táblázat „törpéje”.
   Legfeljebb mekkora lehet a „törpe”?

2. Az $ABC$ háromszög belsejében levő $P$ pontnak a $BC$, $CA$, $AB$ oldalegyenesekre eső merőleges vetületei rendre $D$, $E$, $F$. Tegyük fel, hogy $AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2$. Az $ABC$ háromszög hozzáírt köreinek középpontjai legyenek $A'$, $B'$, $C'$.
   Igazoljuk, hogy $P$ az $A'B'C'$ háromszög köré írt kör középpontja.

3. Legyen $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Az $x_0$ valós számból kiindulva képezzük az $x_0$, $x_1=f(x_0)$, ..… , $x_{n+1}=f(x_n)$, … sorozatot, amíg csak $x_n\neq 0$. Nevezzük az $x_0$ számot „V-számnak”, ha a sorozat véget ér, azaz valamely $n$-re ($n \geq 0$) $x_n$=0. Bizonyítsuk be, hogy minden nyílt intervallum tartalmaz V-számot.

4. A pozitív egész $n$ számból a következő módon képezzük a $g(n)$ számot:
   (i) $n$ utolsó jegyét a szám elejére hozzuk, így kapjuk $k$-t;
   (ii) $k$ szám négyzete legyen $j$;

(iii) $j$ szám első jegyét az utolsó helyre mozdítva kapjuk $g(n)$ értékét. Például $n$=504 esetén $k$=450, $j$=202500, $g(504)$=025002=25002.
Határozzuk meg mindazon $n$ számokat, melyekre $g(n)=n^2$.

5. A $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ különböző körök, $k_1$ és $k_3$ kívülről érintik egymást $P$-ben. $k_2$ és $k_4$ körök is kívülről érintik egymást ugyanezen $P$ pontban. A körök $P$-től különböző közös pontjai: $k_1 \cap k_2 = A$, $k_2 \cap k_3 = B$, $k_3 \cap k_4 = C$, $k_4 \cap k_1 = D$. Mutassuk meg, hogy:
$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

6. Legyen $f(x)$ olyan egész együtthatós polinom, amely nem írható fel két alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom szorzataként. Tegyük fel, hogy $f(x^2)$ viszont felírható két őnála alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom szorzataként.
Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan egész együtthatós $g(x)$ és $h(x)$ polinom és $k$ egész, hogy
$$f(x) = k \cdot \left((g(x))^2 - x(h(x))^2\right).$$

## 2004. május 14.

A tanév utolsó olimpiai szakköre. (Május 20-án 2. válogatóverseny.)

1. Egy egyenesen van $n$ piros és $n$ kék pont. Mutassuk meg, hogy az egyenesnek van olyan pontja, melynek a pirosaktól vett távolságainak összege megegyezik a kékektől vett távolságainak összegével. Mi a helyzet, ha a pontok a síkban vannak elszórva?

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben az $A$, $B$, $C$ csúcsoknál ugyanakkora szög van. Legyen az $ABC$ háromszög magasságpontja $M$, köréírt körének középpontja $O$. Igazoljuk, hogy $O$, $M$, $D$ egy egyenesen vannak.

3. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész $n$ szám felírható $k–m=n$ alakban, ahol $k$ és $m$ számoknak ugyanannyi prímosztójuk van.

4. Pozitív egészek egy halmaza olyan, hogy bármely 2004 szomszédos szám között van néhány halmazbeli elem. Igazoljuk, hogy van a halmazban két olyan szám, hogy egyik osztja a másikat.

5. Egy 50×50-es tábla mezőit 4 színnel színeztük ki. Igazoljuk, hogy kiválasztható egy olyan mező, melynek oszlopában felette és alatta is van vele megegyező színű mező, továbbá sorában tőle jobbra is és balra is van vele megegyező színű mező.

6. $ABCD$ húrnégyszög, az $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$ háromszögek beírt köreinek középpontjai $D'$, $A'$, $B'$, $C'$. Igazoljuk, hogy $A'B'C'D'$ téglalap.