1. feladatsor **2013.09.13.**

1. Legyen $ABCDEF$ egy szabályos hatszög. A hatszög AB és BC oldalára megrajzoljuk kifelé a $BAXY$ és $CBZT$ négyzeteket, illetve a CD és DE oldalára befelé a $CDPQ$ és $DERS$ négyzeteket. Igazoljuk, hogy $\overline{PS} = \overline{YZ}$.

2. Hány olyan 2013-nál kisebb pozitív egész szám van, amely felírható 3, illetve 5 egymást követő egész szám összegeként is?

3. Melyek azok az n egész számok, melyekre az $\frac{n^2+11}{n-1}$ tört értéke egész szám?

4. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű csúcsa C, illetve CT, CS és CF a háromszög magasságvonala, szögfelezője és súlyvonala. Mekkorák a háromszög szögei, ha a háromszögben teljesül, hogy $\overline{SF} = 2\overline{TS}$?

5. Egy tengerparti szállodában 20 szoba van. Az öböl partján fekvő szállodának mind a 20 szobája a tengerre néz. Egy vendég vagy egy szobat vesz ki két napra, vagy két szomszédosat egy napra. A szobák ára napi egy aranytallér. A vendégkönyv szerint a szezon első napján az első szoba üres volt, az utolsó, századik napon pedig a huszas számú szobát nem vette ki senki. Bizonyítandó, hogy ebben a szezonban a szálloda bevétele legfeljebb 1996 aranytallér volt.

Beadási határidő: 2013.09.20.

2. feladatsor **2013.09.20.**

1. Dominókészletünkben mindegyik dominón 0-tól 9-ig szerepelnek a számok, az összes lehetséges párosításban. Legfeljebb hány dominót lehet egyszerre kirakni a dominójáték szabályainak megfelelően?

2. Balszerencsés Karcsi nagyon büszke arra, hogy neki mekkora balszerencséje van. Legújabb vágya az, hogy jegyeinek átlaga matematikából az év végén 4,49 és 4,5 közé essen, így éppen lemaradjon az év végi ötösről, ezzel demonstrálva azt, mennyire balszerencsés is ő. Legkevesebb hány osztályzat kéne szereznie ahhoz, hogy elérhesse célját?

3. Adott a síkon az $ABCD$ egységnégyzet. A négyzet AB oldalán egy egységhosszúságú tű fekszik. Lehet-e úgy mozgatni a síkban a tűt, hogy a mozgás végén a CD oldalra kerüljön, és közben az általa súrolt terület legfeljebb 1/1000 területegység legyen? (A tű egy szakasz, tehát a területe nulla.)

4. Ketten a következő játékot játszák: a 8×8-as sakktábla bal felső sarkában egy bábu áll, mely vízszintesen jobbra léphet legfeljebb négy mezőt, vagy függőlegesen lefelé legfeljebb három mezőt. A játékban az a vesztes, aki a tábla jobb alsó mezőjére lép. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

5. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F. Bizonyítsd be, hogy az AFC háromszöget át lehet darabolni a BFC háromszöggé. (Csak véges sok részre szabad vágni a három-szögeket.)

Beadási határidő: 2013.09.27.

3. feladatsor **2013.10.05.**

1. Egy sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, és $n \geq 3$ esetén $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. Keress képletet a sorozat n-ik tagjára, és bizonyítsd a képlet helyességét.

2. Adva volt öt szám. Ezekből képeztük az összes lehetséges háromtagú összeget. A következő értékeket kaptuk: 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15 és 17. Mi lehetett a kiindulásul vett öt szám?

3. Lehet-e találni olyan pozitív a, b, c számokat, melyekre egyszerre teljesül $a(1-b) > 1/4$, $b(1-c) > 1/4$, és $c(1-a) > 1/4$?

4. Két prímszámot ikerprímnek nevezünk, ha különbségük kettő. Melyek azok a p és q ikerprímek, melyekre $p^2 - pq + q^2$ is prímszám?

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlókkal felbontunk háromszögekre, mindig található olyan háromszög a felbontásban, melynek legalább két közös oldala van az eredeti sokszöggel.

Beadási határidő: 2013.10.11.

4. feladatsor **2013.10.12.**

1. Elő lehet-e állítani az 1 számot 10 különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként?

2. Egy 8×8-as sakktáblán elhelyeztek nyolc egymást nem metsző 2×2-es négyzetet, melyek mindegyike pontosan négy kis négyzetet fed le. Igazold, hogy egy kilencedik 2×2-es négyzet is elhelyezhető, amely nem metszi a többit.

3. Bizonyítsd be, hogy két közös alappal rendelkező és egyforma magasságú paralelogramma mindig átdarabolható egymásba.

4. A síkot részekre bontjuk véges sok egyenessel. Kiszínezhetők-e biztosan a kapott részek két színnel úgy, hogy bármely két szomszédos (közös szakasszal rendelkező) tartomány színe eltérő?

5. Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala, a és b, továbbá teljesül, hogy $\beta = 3\alpha$.

Beadási határidő: 2013.10.18.

5. feladatsor **2013.10.19.**

1. Bizonyítandó, hogy ha $a+b+c=0$, akkor $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Határozd meg, hogy n darab háromszögvonal legfeljebb hány részre oszthatja a síkot.

3. Számold ki a $2k$ darab 1-es számjegyből álló E és a k darab 2-es számjegyből álló F szám különbségnek négyzetgyökét.

4. Két pozitív egész szám, a és b legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének összege $a+b$. Bizonyítsd be, hogy a két szám közül az egyik osztja a másikat.

5. Anna és Bea a következő játékot játszák:

Anna n darab valós számra gondol (lehetnek közöttük egyenlők is), majd leírja az ezekből készíthető $\frac{n(n-1)}{2}$ összeget egy papírra (ezek között is lehetnek egyenlők), és odaadja Beának. A játékot Bea nyeri, ha biztosan ki tudja találni az Anna által gondolt számokat, különben pedig Anna a nyertes. Kinek van nyerő stratégiája, ha

(a) $n=5$?

(b) $n=6$?

(c) $n=8$?

Beadási határidő: 2013.10.25.

6. feladatsor **2013.11.10.**

1. Két szám összege 4, négyzeteik összege pedig 12. Mennyi lehet a két szám köbének összege?

2. Racionális-e a következő szám? (Az összeadandók száma 99.)

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+10}.$$

3. Hány olyan 2013-nál nem nagyobb pozitív egész n létezik, melyre a

$$\frac{11n+20}{5n+13}$$

tört egyszerűsíthető?

4. Lehet-e találni három különböző a, b és c számot, melyekre $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$ teljesül?

5. Az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjai ebben a sorrendben E, F, G és H. Bizonyítandó, hogy az EF, FG, GH és HE egyeneseknek a négyzet körülírt körével vett nyolc metszéspontja a négyzet csúcsaival együtt egy szabályos tizenkétszöget alkot.

Beadási határidő: 2013.11.18.

7. feladatsor **2013.11.22.**

1. Egy téglalap kerülete 12 egység. Mekkora a téglalap legnagyobb lehetséges területe?

2. Mekkora egy a oldalú szabályos háromszög területének és a háromszög magasságából szerkeszthető szabályos háromszög területének aránya?

3. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság negyedrésze az átfogónak. Mekkorák a háromszög szögei?

4. Lehet-e találni három különböző a, b, c számot, melyek összege nem nulla, továbbá teljesül, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc?$$

5. Bizonyítsd be, hogy minden téglalap átdarabolható egy olyan téglalappá, melynek egyik oldala egy megadott hosszúságú szakasszal egyenlő.

Beadási határidő: 2013.11.29.

8. feladatsor **2013.11.30.**

1. Adott egy félkör, melynek sugara egy egység. A félkörbe téglalapot írunk, melynek két csúcsa a félkört határoló átmérőre, két csúcsa a félkörívre esik. Mennyi a téglalap területének legnagyobb lehetséges értéke?
2. Egy egységsugarú körbe belülről négy egyforma sugarú érintő kört írtak, melyek mindegyike érint két másikat is a négyből. Mekkora a kisebb körök sugara? A választ legegyszerűbb gyökös alakjában, gyöktelenítve add meg.
3. Egy háromszög egyik oldala negyedrésze a háromszög kerületének. Bizonyítsd be, hogy a háromszög beírt köre érinti a háromszög egyik középvonalát is.
4. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben szerepel a 8-as és a 9-es számjegy is?
5. Keresd meg a következő egyenlet egész megoldásait:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

Beadási határidő: 2013.12.06.

9. feladatsor **2013.12.07.**

1. Rakj ki tizenkét gyufaszál segítségével egy olyan alakzatot, aminek a területe 4 területegység. (A hosszúságegység a gyufaszál hossza. Szükség esetén körző és vonalzó is használható a feladat megoldásához.)

2. Egy reggel az iskolában föl voltak írva az egymást követő egész számok 1-től kezdve egy bizonyos számig. A hetes az egyik számot letörölte. Pár nap múlva vita támadt, melyik számot is törölték le. A vitázók csak arra emlékeztek, hogy a megmaradt számok számtani közepe $\frac{45}{4}$ volt. Melyik számot törölhette le a hetes?

3. Van-e olyan pozitív egész szám, melynek első jegyét a szám végére írva az eredeti szám háromszorosát kapjuk?

4. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontját M jelöli. Az ABM, BCM, CAM háromszögek körülírt köreinek középpontját P, Q és R jelöli. Bizonyítsd be, hogy a PQR háromszög egybevágó az ABC háromszöggel.

5. Keresd meg a következő egyenlet nemnegatív egész megoldásait:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}.$$

Beadási határidő: 2013.12.13.