

Szakköri feladatok

11. osztály

„Azok a régi OKTV-k!”

1, Egy könyv lapjait megszámoztuk 1-gyel kezdve 1986-tal bezárólag. Hányszor fordul elő a számozásban az 1-es számjegy?

2, Ha egy a oldalú négyzetet párhuzamosan vetítünk az egyik oldalával párhuzamos e egyenesre, akkor a vetület $3a$ hosszúságú szakasz lesz. (Síkídom egyenesre való vetületét azok a pontok alkotják, amelyeket a síkidom összes pontján át húzott, egy adott iránnyal párhuzamos egyenesek metszenek ki az adott egyenesből.) Mekkora szöget zárnak be a vetítősugarak az e egyenessel?

3, Határozzuk meg azokat a_1, a_2, \dots, a_{14} pozitív egész számokat, amelyek kielégítik a

$$3^{a_1} + 3^{a_2} + \dots + 3^{a_{14}} = 6558$$

egyenlőséget!

4, Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c egész számok esetén az

$$abc(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$

szorzat osztható 80-nal!

5, Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 378 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

6, Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

7, Ha a $3x^2 - 2x + 5$ polinomban az x helyébe egy másik polinomot helyettesítünk, akkor a $12x^4 + 56x^2 + 70$ polinomot kapjuk. Mennyi az x helyébe helyettesített polinom együtthatóinak összege?

8, Állapítsuk meg az $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}$ függvény minimumát, ha a, b, c adott pozitív valós számok!

9, Oldjuk meg az egyenletet a pozitív egész számok halmazán!

$$xyz + xz + yz - xy - x - y + z = 1986$$

10, Oldjuk meg az egyenletet a pozitív számok körében:

$$x + \frac{1}{x} = -y^2 + 6y - 7.$$