

Bevezetés a projektív geometria tanításába

1 Bevezető feladatok

1. Anna és Peti (nem túl bölcs módon) besétáltak a vonatalagútba. Amikor az alagút harmadáig értek, meghallották a hátuk mögött a mozdony sípját. Anna visszafordult, Peti pedig folytatta az utat az alagútban. Mindketten pont az alagút végénél találkoztak a szerelvénnel. Mekkora volt a vonat sebessége, ha a gyerekek a sípszó meghallása után 10 km/h sebességgel szaladtak?
2. Rajzoljunk a táblára egy konvex négyszöget. Erről a négyszögről azt tudjuk, hogy egy téglalap alakú foci pályáról készült fénykép. Szerkesszük meg a fényképen a foci pályá középvonalát.
3. Az előző feladat megbeszélése után definiáljuk a vetítést egy adott pontból két sík között. Milyen tulajdonságai vannak a vetítésnek? A megszokott tulajdonságok közül melyik teljesül, melyik nem?
4. Az előző feladat megbeszélése után a következőket bizonyítottam be a gyerekekkel:
 - a. a vetítés egyenestartó
 - b. egymással párhuzamos egyenesek képei párhuzamosak (ha párhuzamosak azzal az egyenessel, amelyet nem lehet levetíteni), vagy mind egy ponton mennek át (sugársort alkotnak), és a közös pontjuk rajta van azon az egyenesen, amely azokból a pontokból áll, melyek nincsenek benne a vetítés értékkészletében.
5. Az előző két feladat megbeszélése után definiálok az ideális térelemekkel bővített projektív síkot.
6. Adott egy szakasz vetületének a képe. Mit kell még megadni, hogy a szakasz felezőpontjának vetülete szerkeszthető legyen?
7. Adott egy kör vetülete (egy oválist rajzolok a táblára). Szerkesztendő a kör középpontjának a vetülete.
8. Az előző feladat után kimondom a következő nehéz állítást, melyet nem feltétlenül bizonyítunk (ez a diákokon múlik), de más feladatokban felhasználunk: ha adott egy kör és egy, a kört nem metsző egyenes, akkor lehet úgy vetíteni, hogy a kör képe kör legyen, az egyenes képe pedig az ideális egyenes legyen. A bizonyításom azon múlik, hogy a sztereografikus projekciónál kör képe kör, amihez nem árt valamennyit tudni a (térbeli) inverzióról, bár meg lehet kerülni a bizonyításban.

2 A vetítés alkalmazásai

1. A PX és PY egyenesen úgy vesszük fel az A , B és C , illetve A' , B' és C' pontokat, hogy AA' , BB' és CC' egy ponton menjenek át. Bizonyítsuk be, hogy az AB' és $A'B$, BC' és $B'C$ és a P pont egy egyenesre esnek.

- Adott három egy ponton átmenő egyenes, a , b és c , illetve három pont az egyeneseken kívül, X , Y és Z . Szerkesztendő az A , B és C pont az a , b és c egyenesen úgy, hogy AB átmenjen Z -n, BC X -en és CA Y -on.

Ez a feladat is kiválóan alkalmas kísérletezésre Geogebra segítségével.

Megjegyzés: a feladat önmagában is remekül megállja a helyét, de a Desargues-tételhez is kapcsolódik.

- Bizonyítsuk be a pillangó-tételt: adott egy körben az AB húr, melynek felezőpontja F . Legyen továbbá CD és XY két további húr, mely átmegy F -en. Messe CX és DY az AB egyenest P -ben és Q -ban. Bizonyítandó, hogy F a PQ szakaszt is felezi.

Megjegyzés: nem a kettősviszonyos bizonyításra gondolok, az eddig megbeszéltek alapján is található egy bizonyítás.

- Szerkesszünk érintőt egy adott körhöz egy adott pontból csak vonalzó használatával.
- Adott két távoli pont és egy nagyon rövid vonalzó. Kössük össze a két pontot egy egyenessel.

3 Harmonikus pontnégyesek

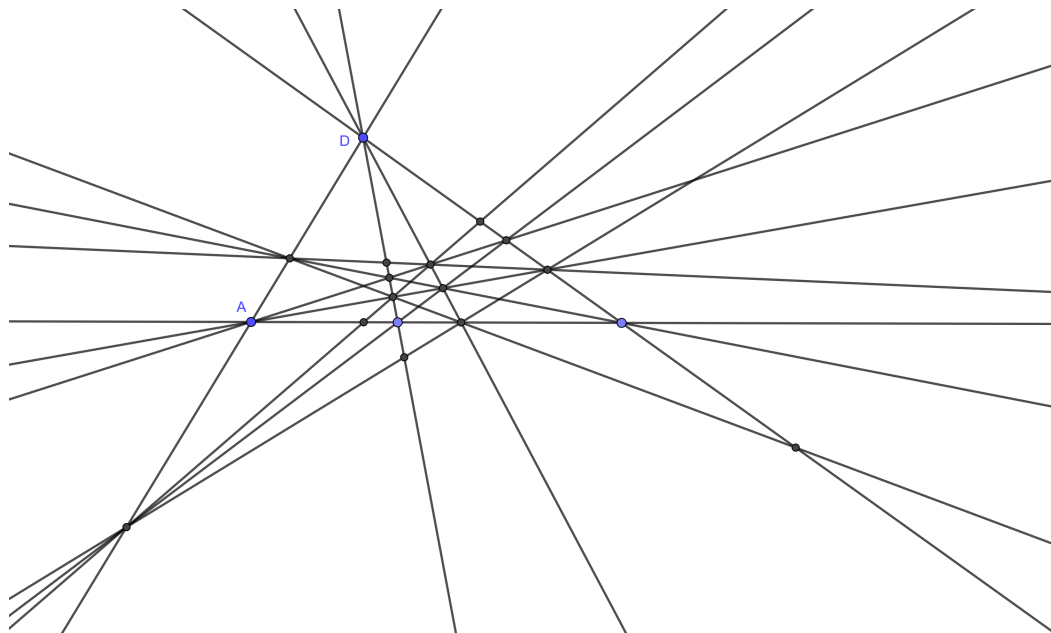
- Az ABC háromszög BC oldalán felveszek egy tetszőleges D pontot. Az AD szakaszon ezután egy P pontot mozgatok. A BP és a CP egyenes az AC illetve az AB oldalt R -ben és S -ben metszik. Ellenőrizzük Geogebra-ban és bizonyítsuk be, hogy az RS egyenesek minden átmennek egy fix ponton (sugársort alkotnak).
- Harmonikus pontnégyesnek nevezem egy egyenesen egy szakasz végpontjainak, felezőpontjának és az egyenes ideális pontjának vetítésével megkapható pontnégyeseket. Bizonyítandó, hogy a harmonikus pontnégyesek vetülete harmonikus.
- Bizonyítsd be, hogy az alábbi definíciók is egyenértékűek a fentivel:
 - A , B és F , I harmonikusan választják el egymást, ha $AI/IB = AF/FB$.
 - Az AB szakasz hossza az AF és az AI szakasz hosszának a harmonikus közepe.
- Hogyan lehetne definiálni egy körön a harmonikus pontnégyeseket? Lehetséges definíciók:
 - lehet úgy vetíteni, hogy a kör kör maradjon, a négy pont képe pedig négyzet legyen.
 - lehet úgy vetíteni, hogy a kör kör maradjon, a négy pont képe pedig deltoid legyen.
 - ha a négy pont A , B , I és F , akkor $AI \cdot BF = BI \cdot AF$.
 - az A -ban és B -ben húzott érintők metszéspontja egy egyenesre esik I -vel és F -fel.
- Adott egy k kör és a körön kívül egy P pont. A P pontból érintőket húzunk a k -hoz, az érintési pontok X és Y . Egy tetszőleges P -n átmenő szelő a kört az A és a B pontban metszi.
Bizonyítsd be, hogy X , Y , A és B harmonikus.

4 További alkalmazások, kapcsolódó feladatok

- OKTV III. kategória döntő, 2014/2015 1. feladat:
A k körhöz egy külső ponton keresztül egy e szelőt és két érintőt húzunk, az utóbbiak

érintési pontjai A és B . Az A ponton áthaladó, e -vel párhuzamos egyenes az A -tól különböző C pontban is metszi k -t. Bizonyítsuk be, hogy a BC egyenes felezi e -nek a k -ba eső szakaszát.

2. a. Adott egy egyenesen A , B és F úgy, hogy F felezi az AB szakaszt. Adott továbbá egy P pont az egyenesen kívül. Szerkesztendő a párhuzamos P -n keresztül az egyenessel csak vonalzóval.
- b. Adott egy egyenesen A , B és H úgy, hogy H az AB szakasz A -hoz közelebb harmadoló pontja. Adott továbbá egy P pont az egyenesen kívül. Szerkesztendő a párhuzamos P -n keresztül az egyenessel csak vonalzóval.
3. A hegyesszögű ABC háromszög magasságainak talppontjai az AB , BC és CA oldalakon E , F és G . Messe EF , FG és GE a CA , AB és BC oldalak egyenesét az E' , F' és G' pontokban. Bizonyítsd be, hogy E' , F' és G' egy egyenesre esik.
4. Az A , B , C és D pontok ebben a sorrendben egy egyenesre esnek, továbbá adott a P pont úgy, hogy $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 45^\circ$. Milyen hosszú CD , ha $AB = 2$ és $BC = 1$?
5. a. Hány harmonikus pontnégyest találsz az alábbi ábrán? Hogyan lehet egy ilyen ábrát létrehozni?



- b. Keressünk harmonikus pontnégyeseket a Feuerbach-körön.