

Válogatás nemzetközi versenyfeladatokból

1. Kaméleonnak nevezzük az n darab a , n darab b és n darab c betűből álló karakter-sorozatokat. Egy lépés során egy kaméleonban felcserlhetünk két szomszédos karaktert. Bizonyítsd be, hogy bármelyik kaméleonhoz található egy olyan kaméleon, amelyhez legalább $3n^2/2$ lépésben lehet eljutni az adott kaméleontól.
2. Bizonyítandó, hogy egy $8 \times 8 \times 8$ -as kocka három páronként élszomszédos lapját nem lehet lefedni 1×3 -as téglalap alakú matricákkal.
3. Legyen U egy adott egységnégyzet. Tekintsük azokat az egységnégyzeteket, melyeket U -val vagy U 45° -os elforgatottjával egyállásúak. Bizonyítsd be, hogy az ilyen egységnégyzetek uniójaként elálló alakzatok kerületének és területének aránya legfeljebb 4.
4. Bizonyítsd be, hogy két egységnégyzet uniója területének és kerületének aránya legfeljebb 4.
5. Egy $n \times n$ -es táblázat ki van töltve egész számokkal úgy, hogy az élszomszédos mezőkben lévő számok különbsége legfeljebb 1. Bizonyítsd be, hogy a táblázatban szerepel n egyforma szám.
6. Ha m pozitív egész, akkor $S(m)$ jelölje a legkisebb olyan m -nél nagyobb egyenlő pozitív egészt, melyre lehet találni néhány olyan pozitív egészt $m+1$ és $S(m)$ között, melyek szorzatának m -szereke négyzetszám ($S(k^2) = k^2$). Bizonyítandó, hogy az S függvény értékkészletében minden nem prímszám pontosan egyszer fordul elő.
7. Az első síknegyedben lévő rácspontok egy véges részhalmaza stabil, ha minden benne lévő rácsponttól balra és lefelé lévő rácspont szintén benne van a részhalmazban. Bizonyítandó, hogy egy tetszőleges stabil halmaznak legalább annyi páros elemszámú stabil részhalmaza van, mint páratlan elemszámú.
8. Legyen P és Q egymás izogonális konjugáltja az ABC háromszögben, és legyen A' az a pont a háromszög körülírt körének BC körívén, melyre $BA'P \sphericalangle = CA'Q \sphericalangle$. B' és C' hasonlóan vannak definiálva. Bizonyítandó, hogy AA' , BB' és CC' egy ponton mennek át.
9. Legyen $n \geq m$ adott pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok tetszőleges n elemű részhalmazának legalább 2^{n-m+1} darab olyan részhalmaza van, melyben az elemek összege osztható m -mel (az üres halmazt beleértve).