

Számelmélet gyöngyszemek 1. (válogatás Dobos Sándor minikurzusának feladataiból)

Matematika OKTV-feladatok

Számelmélet: megoldási módszerek

1. OKTV 2005.1.5. Jelölje $f(n)$ azoknak az n jegyű pozitív egészeknek a számát, amelyekre igaz, hogy az n számjegyei közt előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha $n \geq 2$.

2. OKTV 2005.2.4. Az a , b , c és d egészek olyanok, hogy az ac , $bc + ad$, bd mindegyike osztható az n egésszel.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc + ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók n -nel, azaz $n|bc$ és $n|ad$.

3. OKTV 2006.1.1. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van és ezek összege 84?

4. OKTV 2006.2.1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi összeggel megadott N szám nem prím:

$$N = \left(\sum_{n=1}^{2006} n^n \right) + 2006^{2007}, \quad \text{azaz} \quad N = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2006^{2007}.$$

5. OKTV 2007.1.3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

6. OKTV. 2009.1.3. Melyik az a legnagyobb csupa különböző számjegyet tartalmazó pozitív egész szám, amelynek a számjegyeit tetszőleges sorrendben véve mindig prímszámot kapunk?

7. OKTV 2009.2.2. Bizonyítsuk be, hogy 55 darab egymást követő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

8. OKTV 2010.1.2. Keressük meg mindazon pozitív egész a és b számokat, amelyekre az alábbi négy állítás közül három igaz, egy pedig hamis:

i) $a+1$ osztható b -vel; ii) $a = 2b + 5$; iii) $a+b$ osztható 3-mal; iv) $a+7b$ prímszám.

9. OKTV 2010.2.3. Keressük meg a 2011-nél nagyobb egészek közt a legkisebb olyan S számot, amelyet elosztva a 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokkal, maradékul kétszer kapjuk az 1, 2, 3 számok mindegyikét.

10. OKTV. 2011.1.3. Egy szabályos dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a három dobott szám szorzata 10-zel osztható?