

Számelmélet gyöngyszemek 3. (válogatás Dobos Sándor minikurzusának feladataiból)

21. OKTV 2016.2.3. Határozzuk meg, mely a, b, c nemnegatív egész számok esetén teljesül:

$$3^a + 17 \cdot 4^b = c^2.$$

22. OKTV 2017.1.2. A pozitív egészekből álló $d_1, d_2, \dots, d_k$ sorozatot az n osztóláncának nevezzük, ha $d_1 = 1$ és $d_k = n$, továbbá a sorozat minden tagja -az utolsó kivételével- osztója a következő tagnak. Például $n = 6$ esetén három ilyen osztólánc van, ezek az 1,6; 1,2,6; és az 1,3,6. Hány osztólánc van, ha (a) $n = 1024$; (b) $n = 999$; (c) $n = 1000$?

23. OKTV 2017.2.4. Vegyünk 31 különböző pozitív prímszámot és adjuk össze a negyedik hatványait. Igazoljuk, hogy ha a kapott szám osztható 30-cal, akkor a prímszámok között szerepel három egymást követő prím (azaz $p < q < r$ úgy, hogy a $]p; q[$ és $]q; r[$ nyílt intervallumokban nincsenek prímszámok).

24. OKTV 2018.1.5. Mi lehet az a pozitív egész szám, amelynek összesen 10 pozitív osztója van, ebbe beleszámoltuk az 1-et és magát a számot is, és ennek a tíz számnak az összege 34364?

25. OKTV 2018.2.2. Az 1, 2, ..., n számok közül kiválasztható-e úgy egy k szám, hogy az alábbi M kifejezés értéke négyzetszám legyen, ha (a) $n = 2019$; (b) $n = 2020$?

$$M = \frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n!}{k!}$$

26. OKTV 2018.3.1. Legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pozitív egészek. Legyen továbbá $b_i = [a_i; a_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), ahol $[a_i; a_{i+1}]$ az a_i és a_{i+1} számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

(a) Lehetséges-e, hogy $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$?

(b) Lehetséges-e, hogy $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_{99} = b_{100}$?

(c) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_{n-1}} < 1.$$

27. OKTV 2019.2.3. Határozzuk meg, mely egész n és m számokra teljesül az alábbi egyenlet:

$$n^5 + n^4 = 7^m - 1.$$

28. OKTV 2019.3.1. Melyek azok a 2020-nál kisebb pozitív egész s számok, amelyekre minden egész n esetén $4n+1$ és $sn+1$ relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1?

29. OKTV 2020.2.4. Legyen n pozitív egész. Vegyünk $2n$ darab különböző prímszámot, jelölje szorzatukat L . Tekintsük azon pozitív egész $a < b$ számokat, amelyekre a osztója b -nek és b osztója L -nek. Igazoljuk, hogy ezen (a, b) párok száma 5-tel osztható.

30. OKTV 2021.1.4. Tekintsük az 1, 2, ..., 10 számokat valamilyen sorrendben, jelölje őket $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Legyen

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad b_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}.$$

Hányféle olyan $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ sorrend van, ahol a $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ számok közül egyik sem osztható 3-mal?