

OKTV válogatás szakkörre, 2025.03.19.

1. (95_96/2) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$.

2. (95_96/2) Az ABC derékszögű háromszögbe rajzoljunk egy olyan félkört, amelynek középpontja az AB átfogón van, és amely érinti a befogókat. Jelölje ennek a sugarát r , a háromszög körülírt körének sugarát R , a két középpont távolságát d . Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

3. (95_96/2) Igazolja, hogy nincs olyan pozitív egész számokból álló számtani sorozat, amelynek 5 egymás utáni eleme teljesítené a következő feltételek mindegyikét:

- a) a középső szám prímszám;
- b) a két legnagyobb szám négyzetének összege egyenlő a másik három szám köbének összegével.

4. (95_96/2) Legyen $n \geq 2$ és egész szám. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} < \frac{3}{2}.$$

5. (95_96/2) Határozza meg azokat a háromjegyű természetes számokat, amelyeknek pontosan 10 darab (természetes szám) osztójuk van, és ezen osztók reciprokainak összege 2.

6. (bónusz) Legyen $a, b, c > 0$, $abc = 1$ és $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bizonyítsuk be, hogy a, b, c közül pontosan egy nagyobb, mint 1.

OKTV válogatás szakkörre, 2025.03.19.

1. (95_96/2) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$.

2. (95_96/2) Az ABC derékszögű háromszögbe rajzoljunk egy olyan félkört, amelynek középpontja az AB átfogón van, és amely érinti a befogókat. Jelölje ennek a sugarát r , a háromszög körülírt körének sugarát R , a két középpont távolságát d . Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

3. (95_96/2) Igazolja, hogy nincs olyan pozitív egész számokból álló számtani sorozat, amelynek 5 egymás utáni eleme teljesítené a következő feltételek mindegyikét:

- a) a középső szám prímszám;
- b) a két legnagyobb szám négyzetének összege egyenlő a másik három szám köbének összegével.

4. (95_96/2) Legyen $n \geq 2$ és egész szám. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} < \frac{3}{2}.$$

5. (95_96/2) Határozza meg azokat a háromjegyű természetes számokat, amelyeknek pontosan 10 darab (természetes szám) osztójuk van, és ezen osztók reciprokainak összege 2.

6. (bónusz) Legyen $a, b, c > 0$, $abc = 1$ és $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bizonyítsuk be, hogy a, b, c közül pontosan egy nagyobb, mint 1.