

**OKTV versenyfeladatok a múlt század
második feléből (főleg geometria)**

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valamennyi együtthatója páratlan szám, akkor az egyenlet gyökei nem racionálisak. (O61/II)

2. Mennyi a $K = 5x - 6y + 7z$ legkisebb és legnagyobb értéke, ha x, y, z olyan nem negatív számok, melyekre fennáll, hogy $4x + y + 2z = 4$ és $3x + 6y - 2z = 6$? (O64/I)

3. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b , egyik szára felezőpontjának a másik szára eső vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsuk ki a trapéz területét. (O63/I)

4. Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. Mekkora az adott háromszög területe, ha adva van a keletkezett három háromszög területe: t_1, t_2, t_3 ? (O55/I)

5. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög területe egyenlő a köréje írható kör sugarának és a talpponti háromszög fél kerületének szorzatával. (O59/I)

6. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F , az AF és DE metszéspontja G , a BF és CE metszéspontja H . Bizonyítandó, hogy az AGD és BHC háromszögek területének összege egyenlő az $EHFG$ négyszög területével. (O60/II)

7. A háromszög oldalait belülről érintő körhöz az a, b, c oldalakkal párhuzamos érintőknek a háromszög belsejében levő szakaszai legyenek rendre a_1, b_1, c_1 . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1. \quad (\text{O56/II})$$

8. Biz. be, hogy ha $(a + b + c)(a + b - c) = 4t$, akkor a háromszög derékszögű. Igaz-e az állítás megfordítása? (O69/I)

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög középvonala egyenlő a másik két oldal

számtani közepével, akkor a négyszög trapéz. (O61/I)

10. Az ABC háromszög AB és AC oldalai fölé (kifelé) az AC_1C_2B és AB_1B_2C négyszögeket rajzoljuk. Bizonyítsuk be, hogy **a)** a C_1B_1 szakasz a háromszög egyik súlyvonalának kétszerese; **b)** B_2C_2 szakasz felezőpontja a BC átmérőjű körön fekszik. (O64/I)

11. Egy tetraéder egyik csúcsából kiinduló élek egymásra páronként merőlegesek. Az élek hossza 9, 12, 16 egység. Mekkora a tetraéder e csúcsból kiinduló testmagassága?

12. Egy háromoldalú gúla alapélei 10, 24, 26 egység, oldalélei 40 egység hosszúak. Mekkora a gúla térfogata?

13. Melyek azok az n egész számok, amelyekhez található olyan konvex, síklapokkal határolt test, amelynek n éle van? (O51/II)

14. Ugyanabba az egység sugarú körbe beírtunk egy n és egy $n+1$ oldalú szabályos sokszöget úgy, hogy semelyik két csúcs nem esik egybe. Biz. be, hogy a kör így keletkezett ívei között van olyan, amelynek a mérőszáma nem nagyobb, mint $\frac{\pi}{n(n+1)}$. (O68/II)

15. Egy sík egy S csúcsú szabályos négyoldalú gúla oldaléleit az $ABCD$ négyszögben metszi. Biz. be, hogy $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{1}{SD}$. (O57/II)

16. Egy 6x6-os sakktáblát hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk le úgy, hogy mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítsuk be, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (O63/II)

17. Egy szabályos tetraéder alaplapjának belsejében válasszunk ki egy tetszőleges P pontot, és ebben a pontban állítsunk merőlegest az alaplap síkjára. Ez a merőleges az oldallapok síkjait rendre az X, Y és Z pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg független a P választásától!