

15. szakkör

A vonal felett még meg nem beszélt feladatok találhatóak, a vonal alatt az új feladatok.

11.4. feladat: Egy papíron nem látszik más, csak egy derékszögű koordinátarendszer két tengelye, valamint a (234, 1001) pont, és az az egyenes, ami átmegy ezen a ponton, és a koordinátatengelyekkel együtt egy egyenlőszárú háromszög oldalegyeneseit alkotják. Milyen sűrű négyzethálós papírt tudsz szerkeszteni, ha *csak az eredetileg a papíron levő egyenesekkel párhuzamos egyeneseket tudsz húzni*, már ismert pontokon keresztül? (Már ismert pont a papíron levő pont, illetve egyenesek metszéspontja, illetve bármilyen olyan pont, ami az általad meghúzott egyenesek metszéspontjaként áll elő.)

12.4. feladat: Egy virágboltban háromféle virágot: rózsát, tulipánt és gerberát árulnak. Hányféle **a)** 5 szál **b)** 7 szál **c)** * 77 szál csokrot lehet köttetni?

Két csokrot akkor tekintünk egyformának, ha mindhárom fajta virágból ugyanannyi szál van benne. Nem kell mindhárom fajta virágnak szerepelnie a csokorban.

12.5. feladat: Egy szigeten lovagok és bolondok élnek, a lovagok mindig igazat mondanak, a bolondok igazat vagy hamisat is állítanak, ahogy éppen kedvük tartja. Vendékként érkezünk egy szigetre, ahol tudjuk, hogy 2024 lovag és 1 bolond él. Bárkitől megkérdezhetjük bárki másra rámutatva (kivéve önmagunkat, hiszen mi nem vagyunk szigetlakók), hogy milyen fajta ember a másik. Legalább hány kérdés kell ahhoz, hogy biztosan kitaláljuk, ki a bolond?

13.1. feladat: a) Egy szilveszteri összejövetelen egy baráti társaságban mindenki mindenkivel koccintott. Az összes koccintás számát négyzetre emelve éppen 2025-öt kapunk. Hány főből áll a társaság?

b)* Egy másik szilveszteri összejövetelen hatan vettek részt. Anna 4, Bálin 3, Cili, Dénes és Ede 2, Fanni pedig 1 embert ismert előzetesen. Hányféle ismeretségi gráf rajzolható?

13.3. feladat: Tekintsük a köbszámok sorozatát: 1, 8, 27, 64, 125, ...

a) Ha a szomszédosak különbségeit nézzük: 7, 19, 37, 61 ... eddig csupa prímszám. Mindig prím lesz?

b) Bizonyítsd be, hogy két szomszédos köbszám különbsége sosem osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel sem.

c) Két köbszám különbsége prímszám. Bizonyítsd be, hogy ez csak szomszédos köbszámokra lehetséges.

d) Két pozitív köbszám összege lehet-e prím (az $1 + 1 = 2$ összegén kívül)?

15.1. feladat: Hét barát körmérkőzéses teniszbajnokságot rendez. Tudjuk hogy az egyes emberek által elért győzelmek számai a következők: 5, 5, 5, 2, 2, 1, 1. Fel tud-e ez a hét ember állni egy körvonalra úgy, hogy mindenki legyőzte a jobb oldali szomszédját?

15.2. feladat: A sík A, B, C pontjai mind az O-tól egyenlő távolságra helyezkednek el. A B pont az AOC konvex szög belsejében van. Az AO, BO és CO szakaszokra, mint átmérőkre írt K_a , K_b , és K_c körök tartományokra osztják a síkot. Tekintsük azt a T véges tartományt ezek közül, melynek a B pont a határán van. Határozd meg a T területének és az ABC háromszög területének az arányát!

15.3. feladat: Legyenek az a , b és c olyan természetes számok, melyekre $a \mid b^2$, $b \mid c^2$ és $c \mid a^2$ teljesül.

a) Van ilyen feltételekkel olyan a, b, c számhármass, melyre nem igaz, hogy $abc \mid (a + b + c)^6$?

b) * Mutassuk meg, hogy minden a feltételt teljesítő a, b, c számhármassra $abc \mid (a + b + c)^7$.

Megjegyzés: $x \mid y$ azt jelenti, hogy x osztója y -nak.