

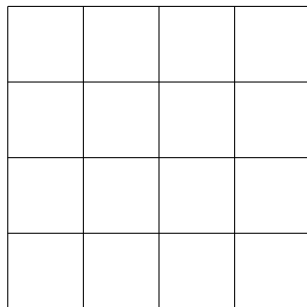
## 17. szakkör

**17.1. feladat:** Mutass három különböző 100-nál kisebb pozitív prímet, amely osztja a  $3^{32} - 2^{32}$  számot. (Számítógépet ne használj!)

**17.2. feladat:** Az ábrán látható táblázat minden kis négyzete 1 cm oldalhosszúságú.

A határvonalakat cérnával szeretnénk lefedni.

Meg lehet-e ezt tenni **a)** 5 db 8 cm hosszú; **b)** 8 db 5 cm hosszú cérnával?



**17.3. feladat:** Bizonyítsd be, hogy ha egy szabályos háromszögben felvesszünk egy  $P$  pontot, akkor az oldalaktól vett távolság-összeg állandó!

**17.4. feladat:** A huszárok díszszemléjén  $m$  sorban és  $n$  oszlopban vonulnak a katonák. Tudjuk, hogy minden sor és oszlop teljes, valamint hogy  $m$  és  $n$  is legalább 3. Parancsra a huszárok megállnak, és kardjuk összeérintésével üdvözik a velük oldalról vagy átlósan szomszédos huszártársaikat. Hány huszár vonult fel a díszszemlén, ha így összesen 789 kardcsörrenést lehetett hallani?

Ezen az oldalon a korábbi feladatsorokról még meg nem beszélt feladatok találhatók:

**11.4. feladat:** Egy papíron nem látszik más, csak egy derékszögű koordinátarendszer két tengelye, valamint a  $(234, 1001)$  pont, és az az egyenes, ami átmegy ezen a ponton, és a koordinátatengelyekkel együtt egy egyenlőszárú háromszög oldalegyeneseit alkotják. Milyen sűrű négyzethálós papírt tudsz szerkeszteni, ha *csak az eredetileg a papíron levő egyenesekkel párhuzamos egyeneseket tudsz húzni*, már ismert pontokon keresztül? (Már ismert pont a papíron levő pont, illetve egyenesek metszéspontja, illetve bármilyen olyan pont, ami az általad meghúzott egyenesek metszéspontjaként áll elő.)

**12.4. feladat:** Egy virágboltban háromféle virágot: rózsát, tulipánt és gerberát árulnak. Hányféle **a)** 5 szál **b)** 7 szál **c)** \* 77 szál csokrot lehet köttetni?

*Két csokrot akkor tekintünk egyformának, ha mindhárom fajta virágból ugyanannyi szál van benne. Nem kell mindhárom fajta virágnak szerepelnie a csokorban.*

**13.1. feladat:** a) Egy szilveszteri összejövetelen egy baráti társaságban mindenki mindenkivel koccintott. Az összes koccintás számát négyzetre emelve éppen 2025-öt kapunk. Hány főből áll a társaság?

b)\* Egy másik szilveszteri összejövetelen hatan vettek részt. Anna 4, Bálin 3, Cili, Dénes és Ede 2, Fanni pedig 1 embert ismert előzetesen. Hányféle ismeretségi gráf rajzolható?

**13.3. feladat:** Tekintsük a köbszámok sorozatát:  $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

a) Ha a szomszédosak különbségeit nézzük:  $7, 19, 37, 61, \dots$  eddig csupa prímszám. Mindig prím lesz?

b) Bizonyítsd be, hogy két szomszédos köbszám különbsége sosem osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel sem.

c) Két köbszám különbsége prímszám. Bizonyítsd be, hogy ez csak szomszédos köbszámokra lehetséges.

d) Két pozitív köbszám összege lehet-e prím (az  $1 + 1 = 2$  összegén kívül)?

**15.3. feladat:** Legyenek az  $a, b$  és  $c$  olyan természetes számok, melyekre  $a \mid b^2$ ,  $b \mid c^2$  és  $c \mid a^2$  teljesül.

a) Van ilyen feltételekkel olyan  $a, b, c$  számhármass, melyre nem igaz, hogy  $abc \mid (a + b + c)^6$ ?

b)\* Mutassuk meg, hogy minden a feltételt teljesítő  $a, b, c$  számhármásra  $abc \mid (a + b + c)^7$ .

*Megjegyzés:  $x \mid y$  azt jelenti, hogy  $x$  osztója  $y$ -nak.*

**16.3. feladat:** Számítsd ki a következő összeget:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2026}$$

**16.4. feladat:** Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}}$$