Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2018 - 2019
7.osztály
Döntő
Megoldások

1. *Egy dobozban piros, kék és zöld színű golyók vannak. A dobozból legalább tizenkét golyót kell kivenni, hogy biztosan legyen a kivett golyók közt piros színű, és legalább tizenhetet, hogy a kivettek közt biztosan legyen piros színű is és zöld színű is. Tudjuk továbbá, hogy legalább hét golyót kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük olyan, ami nem kék színű. Legalább hány golyót kell kivenni, ha azt szeretnénk, hogy a kivett golyók között legalább két zöld színű legyen?*

Megoldás:

Legalább 12 golyót kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük piros színű, ezért a nem pirosak száma 11. Legalább hét golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen nem kék, tehát a kékek száma 6, így a korábban kapott eredményből a zöldek száma 5. Legalább 17 golyót kivéve lesz piros is és zöld is, tehát az összes kékek és pirosak vagy az összes kékek és zöldek száma 16. A kékek és zöldek száma együtt 11, tehát csak az lehet, hogy az összes kékek és pirosak száma 16, azaz 10 piros golyó van a dobozban. Így 16 golyót ki tudunk úgy venni, hogy nincs köztük zöld, de ekkor az összes pirosat és kéket kivettük. Tehát a maradék zöldből még kettőt kell kivennünk. Azaz legalább 18 golyót kell kivennünk.

2. *Nagyi így szólt unokáihoz: „Ha mindegyikőtöknek 12 pogácsát sütök, akkor még 17 pogácsára való tésztám marad. Annyi tésztát viszont nem készítettem, hogy mindenkinek 14 pogácsa jusson, mert ehhez 5 pogácsára való tészta hiányzik." Hány unokája van nagyinak?*

Megoldás:

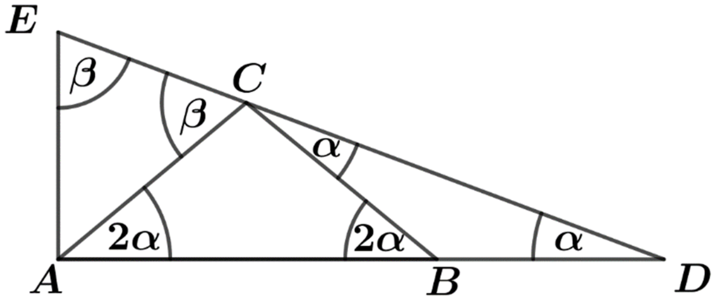
Induljunk ki abból, hogy az unokák megkapták a 12 darab pogácsát. A maradék 17-et kezdjük el kiosztani úgy, hogy 14-re egészítjük ki a pogácsák számát. 8 unokánál sikerül, és marad még egy pogácsa. Még 5 hiányzik, azaz még 3 unokának nem sikerült kiegészíteni a pogácsák számát. Tehát 11 unokája van Nagyinak.

Természetesen a feladat egyenlettel is megoldható. Legyen u az unokák száma! Ekkor $12 \cdot u + 17 = 14 \cdot u - 5$, azaz $2 \cdot u = 22$, vagyis $u = 11$

Visszaellenőrizve a szövegbe a 11 unoka helyesnek mutatkozik.

3. *Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapját a B csúcson túl meghosszabbítottuk a szár hosszával. Az így kapott pont lett a D. Az AB alapra az A csúcsban merőlegest állítunk, majd a C-t tartalmazó félsík irányába a merőleges egyenesre felmértük a szár hosszát. Az így kapott pont lett az E. Azt tapasztaltuk, hogy a D, C és az E pontok egy egyenesre illeszkednek. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit!*

Megoldás:



Rajzoljuk meg a feltételeknek megfelelő háromszöget, és jelöljük rajta a szögeket! CBD háromszög egyenlő szárú CD alappal, ACE háromszög szintén egyenlő szárú CE alappal. D, C, E egy egyenesre esik, így az ABC háromszög C csúcsánál lévő szög továbbá az α és a β együtt $180°$. Mivel ADE háromszög derékszögű, A csúcsnál van a derékszöge, ezért $\alpha + \beta = 90°$. Így ABC háromszög C csúcsánál $90°$ van, az AB alapon fekvő szögek $45°$-osak.

4. *Egy versenyen 64 résztvevő van, és mindenki játszik a többiekkel mérkőzéseket (egy mérkőzés csak egy játszmából áll, döntetlen nem lehetséges). Aki összegyűjt három vereséget, az kiesik. A győztes az, aki a végén bennmarad egyedül. Minimum, illetve maximum hány mérkőzésre kerülhet sor ezen a versenyen?*

Megoldás:

Nézzük az egyes mérkőzéseket a vesztes oldaláról. Minden résztvevő akkor esett ki, amikor pontosan három vereséget szedett össze, tehát az összes vereségek száma $63 \cdot 3$, plusz a győztes vereségeinek száma. Ez lehet $0, 1$ vagy 2, mert ő nem esett ki. Tehát a mérkőzések minimális száma $63 \cdot 3 = 189$, a maximális száma $189 + 2 = 191$.

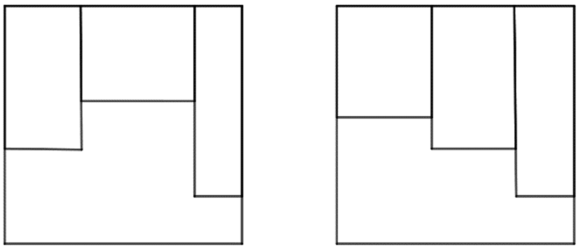
Mivel minden mérkőzésen pontosan egy győztes és egy vesztes van, illetve egy-egy játékos mérkőzéseinek számára a három vesztett mérkőzés utáni kiesésen kívül semmiféle kikötés nincsen, ezért mind a minimum, mind a maximum mérkőzésszám előállhat. Egy-egy példával alátámasztva:

Állítsuk sorba a versenyzőket! Az első háromszor kikap a másodiktól és kiesik, a második háromszor kikap a harmadiktól és kiesik, a harmadik háromszor kikap a negyediktől és kiesik, és így tovább mindaddig, amíg a hatvanharmadik háromszor kikap a hatvannegyediktől és kiesik. Ekkor a hatvannegyedik játékosnak 0 darab vesztett mérkőzése van ő nyert, a lejátszott mérkőzések száma pedig $63 \cdot 3 = 189$.

A maximum eléréséhez a hatvanharmadik versenyző kétszer megveri a hatvannegyediket mielőtt összegyűjtené a három vereségét. Ekkor $189 + 2 = 191$ az összes mérkőzés száma.

5. *Adott egy 13×13 cm oldalhosszúságú négyzet! Ezt a négyzetet kell letakarni 5 db téglalappal, melyek oldalainak hossza centiméterben mérve egész szám, és a hosszúságok között 1-10 cm-ig minden lehetséges hossz pontosan egyszer szerepel! A lefedés során a téglalapok nem lóghatnak le a négyzetről, és egymást részlegesen sem fedhetik át. A feladat két különböző téglalap-ötössel oldható meg. Keressük meg mindkét lefedést*!

Megoldás:



Tegyük fel, hogy a lefedés során a négyzet egyik oldalára 3 (vagy több) téglalap oldala illeszkedik. Mivel a téglalapok másik oldalai különböző hosszúságúak, ezért a négyzet még eddig nem lefedett része a megmaradt 2 téglalappal nem fedhető le. (lásd ábra) Tehát a lefedés során a négyzet egyik oldalán legfeljebb (a méretek miatt pontosan) 2 téglalap oldala alkothatja. A 13 kéttagú összegként csak $3 + 10; 4 + 9;\ 5 + 8$ és $6 + 7$ alakban állítható elő a lehetséges számokból, ezért a négyzet egyik oldalára a 3 és a 10, a másikra a 4 és 9, a harmadikra az 5 és 8, a negyedikre pedig a 6 és 7 hosszúságú oldalak illeszkednek. Így a kimaradó 1 és 2 egység hosszú oldalak az ötödik, a négyzet belsejében lévő téglalapnak az oldalai. A belső téglalapok oldalai csak úgy lehetnek 1 cm és 2 cm hosszúak, ha a négyzet egyik oldalára a 3 cm és 10 cm, a vele szemben lévő oldalára pedig a 4 cm és 9 cm $(4 - 3 = 1\ és\ 10 - 9 = 1)$hosszúságú oldalak illeszkednek. Így a másik szemben lévő két oldala közül az egyikre az 5 cm és 8 cm, a másikra a 6 cm és a 7 cm $(7 - 5 = 2\ és\ 8 - 6 = 2)$ hosszúságú oldalak illeszkednek.

A két lehetséges lefedés: