Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
7. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: 19 gyerek áll egy oszlopban, egymás mögött. A szomszédosak állhatnak egymással szemben, vagy akár egymásnak háttal is. Megkérdezzük ki hány gyereket lát maga előtt? Mennyi lehet a gyerekek által mondott számok összegének maximuma illetve minimuma? *(8 pont)*

1. feladat megoldás: Az oszlop középső tagja, aki mindkét irányból a tizedik gyerek, akármerre is néz, mindenképpen 9 gyereket lát maga előtt. *(1 pont)*

Összesen a lehető legtöbb gyereket akkor látják maguk előtt, ha a középsőn kívül minden gyerek arra fordul, amerre több gyereket lát, a legkevesebbet pedig akkor, ha mindenki a kevesebb gyerek felé fordul. *(1 pont)*

Először számoljuk ki a maximumot. A szélső gyerek 18 embert lát maga előtt, a második már csak 17-et, a kilencedik 10-et. Tehát a $18 + 17 + \ldots 10$ összeget kell venni kétszer, és ehhez hozzáadni a középső által látott 9 gyereket. *(1 pont)*

$18 + 17 + \ldots 10 = \frac{28 \cdot 9}{2} = 126$ (Gauss-módszerrel vagy kézzel összeadva.) *(1 pont)*

Tehát a maximum: $126 \cdot 2 + 9 = 261$. *(1 pont)*

Most pedig számoljuk ki a minimumot. A szélső gyerek nem lát senkit maga előtt, a második már 1 gyereket lát, a kilencedik 8-at. *(1 pont)*

$1 + 2 + \ldots 8 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ (Gauss-módszerrel vagy kézzel kiszámolva.) *(1 pont)*

Tehát a minimum: $36 \cdot 2 + 9 = 81$. *(1 pont)*

2. feladat: Péter megkérdezi Karcsit a tegnapi futóverseny eredményéről. Karcsi emlékei homályosak, de az alábbiakra emlékszik: négyen indultak a versenyen, A, B, C és D. Holtverseny nem volt. C legalább két társát megelőzte. D még A előtt célba ért. B nem lett sem utolsó sem első. Péter gondolkozik egy kicsit, majd azt mondja, hogy ebből sajnos még nem tudja, hogy mi lett a végeredmény. - Legalább arra próbálj még visszaemlékezni, hogy C legalább, vagy pontosan két embert előzött meg?
Karcsi elmondta, hogy melyik és így Péter már tudta a végeredményt. Mi lett a futóverseny végeredménye? *(8 pont)*

2. feladat megoldás: Mivel C legalább két embert előzött meg, és holtverseny nem volt, ezért C elsőként vagy másodikként ért célba. *(1 pont)*

Vizsgáljuk meg, mi lehetett a végeredmény, ha C elsőként ért célba. Ekkor biztosan A lesz az utolsó, hiszen B nem lehet, D pedig előbb végzett, mint A. *(1 pont)*

Ekkor viszont B lehetett a második és D a harmadik, illetve fordítva is, D lehetett a második és B a harmadik, mindkét esetben igazak Karcsi állításai. *(2 pont)*

Ha azonban C második helyezett, vagyis tudjuk, hogy pontosan két embert előzött meg, akkor ugyanúgy A kell legyen az utolsó, B viszont nem lehet első, tehát ő csak harmadik helyen végezhetett, és B az első. *(2 pont)*

Tehát csak akkor tudhatta Péter a verseny végeredményét, ha Karcsi arra emlékezett, hogy C pontosan két embert előzött meg, és így a végeredmény: DCBA. *(2 pont)*

3. feladat: Hány olyan 100-nál kisebb pozitív egész szám létezik, amelynek négyzete köbszám (egy egész szám harmadik hatványa), harmadik hatványa pedig négyzetszám (egy egész szám második hatványa)? *(8 pont)*

3. feladat megoldás: Vizsgáljuk a keresett szám prímtényezős felbontását. Az ebben szereplő mindegyik prímszámra igazak a következő állítások:

Mivel a keresett szám négyzete egy köbszám, és egy köbszám prímtényezős felbontásában minden prím kitevője 3-mal osztható, ezért a prím kitevőjének 2-szerese 3-mal is osztható kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy a keresett számban a prím kitevője szintén 3-mal osztható. *(2 pont)*

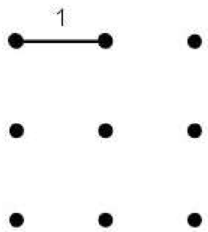
Azt is tudjuk, hogy a keresett prímszám köbe egy négyzetszám, és egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páros, ezért a prím kitevőjének 3-szorosa páros, vagyis a keresett számban a prím kitevője maga is páros. *(2 pont)*

A keresett számban tehát minden prím kitevője páros és 3-mal osztható, vagyis 6-tal osztható. *(1 pont)*

A legkisebb prím a 2, $2^6 = 64$ jó megoldás. 3^6 már nagyobb, mint 100, ezért akár egy prím 6. hatványaként, akár több prím 6. hatványának a szorzataként keressük a megoldást, a többi olyan szám, melynek négyzete köbszám és köbe négyzetszám, már nagyobb lesz, mint 100. *(2 pont)*

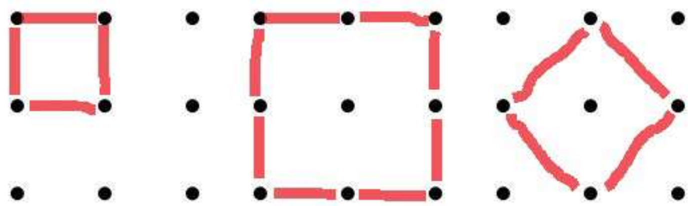
Az 1 is jó megoldás, nem szerepel benne egy prímtényező sem, és igaz rá minden feltétel. Tehát a két jó megoldás az 1 és a 64. *(1 pont)*

4. feladat: Egy 3×3-as pontrács csúcsai közül az összes lehetséges módon kijelölünk 4-et úgy, hogy azok egy négyzet négy csúcsát határozzák meg. Mennyi az így kapott négyzetek összterülete?
Az egységhossz az ábrán van jelölve.



(8 pont)

4. feladat megoldás: Összesen háromféle elrendezésben lehet négyzeteket kijelölni. *(3 pont)*



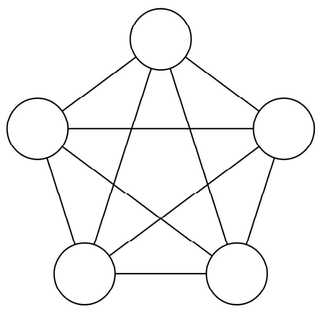
Nevezzük ezeket *kicsi, nagy* és *átlós* négyzetnek.
*Kicsi*ből 4 db van, *nagy*ból 1 db, *átlós*ból pedig szintén 1 db-ot tudunk megrajzolni. *(1 pont)*

A *kicsi* területe 1 egység, a *nagy* területe 4 egység. *(1 pont)*

Az *átlós* területe pedig 2 egység, hiszen négy db kis négyzet feléből áll össze. *(2 pont)*

Így összesen $4 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 2 = 10$ egység a területek összege. *(1 pont)*

5. feladat: Az ábrán látható körökbe számjegyeket írunk, majd a köröket összekötő élekre ráírjuk a bennük lévő számok különbségét (mindig a nagyobb számból vonjuk ki a kisebbet). Hogyan tegyük ezt, hogy minden élre különböző szám kerüljön?



(8 pont)

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza

5. feladat megoldás: Mivel a körökbe csak számjegyeket írhatunk, ezért ezek a számok lehetnek: $0, 1, \ldots 9$. *(2 pont)*

Az ezek között fellépő legkisebb különbség a 0, legnagyobb különbség a 9, tehát összesen tízféle különbség írható az élekre. *(2 pont)*

Összesen $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ él van. *(1 pont)**

Ahhoz, hogy mind a 10 élre különböző számot írjunk, mind a tízféle különbségnek szerepelnie kell. *(1 pont)*

Ha valamelyik élre a 0 kerülne, mint két szám különbsége, az azt jelentené, hogy két körbe ugyanazt a számot írjuk be. Ennek a két számnak bármelyik másik, a körökbe írt számmal ugyanannyi lenne a különbsége, tehát nem teljesülhetne, hogy minden élre különböző szám kerüljön. Tehát nem lehetséges a feltételeknek megfelelő kitöltés. *(2 pont)*

* *Ez a pont akkor is jár, ha ezt a versenyző csak leolvassa az ábráról.*

Ha a versenyző próbálgatásokból vonja le azt a következtetést, hogy nem lehetséges kitölteni az ábrát, de erre egyéb indoklást nem ad, akkor 2 pontot kapjon.

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Jakucs Erika, Kocsis Szilveszter, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza