Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
7. osztály
II. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Aladár, Balambér, Csaba, Dorián és Ede között kiosztjuk az a, b, c, d, e és az f különböző ajándékokat. Mindenki kap legalább egy ajándékot. Aladár kapja az a-t vagy a b-t. Balambér kettőt kap. A többiek ajándékáról nem tudunk semmit. Hányféleképpen kaphatják meg a srácok az ajándékaikat?

(6 pont)

1. feladat megoldás:

1. megoldás: Aladár 2-féle ajándékot kaphat, *(1 pont)*
a maradék 5 ajándékból egyet-egyet Csaba, Dorián és Ede között $5 * 4 * 3$-féleképpen oszthatunk ki. *(2 pont)*
A maradék 2 ajándékot Balambér kapja (ez egyféleképpen lehetséges). *(1 pont)*
Összesen $2 * 5 * 4 * 3 =$ *(1 pont)*
$= 120$-féle ajándékozás lehetséges. *(1 pont)*

2. megoldás: Aladár 2-féle ajándékot kaphat, *(1 pont)*
ezután Balambér $5 * 4 : 2 = 10$-féleképpen kaphatja meg a 2 ajándékát. *(2 pont)*
A maradék 3 ajándékot $3 * 2 * 1$-féleképpen oszthatjuk ki, *(1 pont)*
összesen pedig $2 * 10 * 3 * 2 * 1 =$ *(1 pont)*
$= 120$-féle ajándékozás lehetséges. *(1 pont)*

2. feladat: Adjunk meg 5 pozitív egész számot úgy, hogy páronkénti összegeik között legyen 9 szomszédos egész szám! Lehetséges-e, hogy páronkénti összegeik között 10 szomszédos egész szám van?

(6 pont)

2. feladat megoldás: Meg lehet adni 5 pozitív egész számot, hogy páronkénti összegük 9 különböző, szomszédos egész szám legyen, például így: 1,2,3,5,8. *(2 pont)*

5 számnak éppen 10 páronkénti összege képezhető. Ha ez a 10 összeg 10 egymást követő egész szám, akkor köztük biztosan 5 páros és 5 páratlan szám van. *(1 pont)*

Két egész szám összege csak úgy lehet páratlan, ha egyikük páros, másikuk páratlan. Tehát az 5 pozitív egész szám között kell, hogy legyen páros, és páratlan is. Ha 1 db páros és 4 db páratlan, vagy 4 db páros és 1 db páratlan van, akkor 4 páratlan összeg képezhető, ha 2 db páros és 3 db páratlan vagy 3 db páros és 2 db páratlan szám van, akkor pedig 6 db páratlan összeg képezhető belőlük. Ezek egyike sem eredményez 5 páratlan összeget. *(2 pont)*

Tehát nem adható meg 5 pozitív egész szám úgy, hogy páronkénti összegeik 10 egymást követő egész szám legyen. *(1 pont)*

3. feladat: Keresd meg az összes $\frac{4}{17}$ és $\frac{5}{17}$ közötti olyan értékű törteket, amelyek nevezője kisebb, mint 17!

(6 pont)

3. feladat megoldás: Írjuk fel a keresett törtet $\frac{x}{y}$ alakban, ahol x, y pozitív egész számokat jelölnek és $y < 17$.

$$\frac{4}{17} < \frac{x}{y} < \frac{5}{17}$$

Átrendezve ezt az egyenletet, megkapjuk, hogy:

$$4 \cdot y < 17 \cdot x < 5 \cdot y.$$

(1 pont)

$y < 17$ miatt $x < 5$ *(2 pont)*

$x = 1$ esetén $y = 4$

$x = 2$ esetén $y = 7$

($y = 8$ nem ad új megoldást)

$x = 3$ esetén $y = 11$

($y = 12$ nem ad új megoldást)

$x = 4$ esetén $y = 15$

($y = 14$ és $y = 16$ nem ad új megoldást.

Tehát a megfelelő törtek:

$$\frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{3}{11}; \frac{4}{15}$$

. *(3 pont)*

2. megoldás: Írjuk fel a keresett törtet $\frac{x}{y}$ alakban, ahol x, y pozitív egész számokat jelölnek és $y < 17$.

$$\frac{4}{17} < \frac{x}{y} < \frac{5}{17}$$

Átrendezve ezt az egyenletet, megkapjuk, hogy:

$$4 \cdot y < 17 \cdot x < 5 \cdot y.$$

(1 pont)

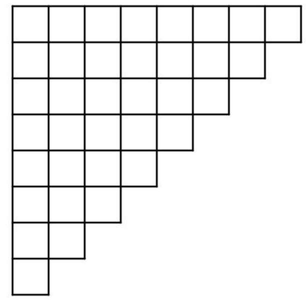
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4y	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
5y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
17x	-	-	-	17	-	-	34	34	-	-	51	51	-	68	68	68
x				1		2	2			3	3		4	4	4	

(4 pont)

A táblázat megfelelő soraiból megkaphatjuk a megfelelő $\frac{x}{y}$ törteket:

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \left(\frac{2}{8} = \frac{1}{4}\right), \frac{3}{11}, \left(\frac{3}{12} = \frac{1}{4}\right), \left(\frac{4}{14} = \frac{2}{7}\right), \frac{4}{15}, \left(\frac{4}{16} = \frac{1}{4}\right)$$

(1 pont)



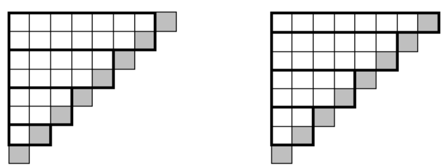
4. feladat: Az ábrán látható "fél sakktáblából" vágjunk ki 4 darab téglalapot a rácsvonalak mentén úgy, hogy a kivágott téglalapok területének összege a lehető legnagyobb legyen!

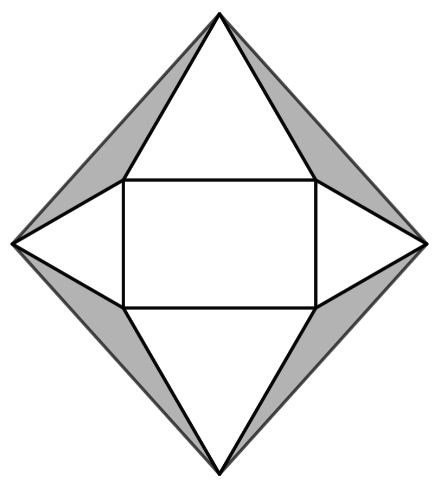
(6 pont)

4. feladat megoldás: A "fél" sakktábla területe 36 négyzet. *(1 pont)*

Az ábrán satírozott 8 négyzetből a téglalapok legfeljebb 1-1 négyzetet tartalmazhatnak, így a kivágás után 4 darab (satírozott) négyzet biztosan megmarad. A maximális (elvi) területösszeg tehát $36 - 4 = 32$ négyzet lehet. *(3 pont)*

Ez elérhető pl. az ábrán látható vágásokkal. *(2 pont)*





5. feladat: Egy téglalap oldalai 6 cm és 8 cm. Az oldalak fölé szabályos háromszögeket rajzoltunk az ábrán látható módon! Igazold, hogy a szürke terület egyenlő a téglalap területével!

(6 pont)

5. feladat megoldás: Nézzük először az egyik háromszög területét! Húzzuk be az oldalegyenest az ábrán látható módon, ekkor $\alpha = 30°$. *(1 pont)*

Azaz a 8 cm-es oldalra emelt szabályos háromszögben ez az egyenes felezi a szemköztes oldalt. *(1 pont)*

A 4 cm-es szakasz éppen a szürke háromszög 6 cm-es oldalához tartozó magasság, *(2 pont)*
vagyis a háromszög területe $6 * 4 : 2 = 12\,cm^2$. Így a négy háromszög területe $48\,cm^2$. *(1 pont)*
A téglalap területe $6 * 8 = 48\,cm^2$. Tehát tényleg megegyeznek a területek. *(1 pont)*