Budapesti Általános Iskolák Matematika Versenye
8. osztály
II. forduló
MEGOLDÁSOK

1. feladat: Aladár, Balambér, Csaba, Dorián és Ede között kiosztunk a, b, c, d, e és f különböző ajándékokat. Mindenki kap legalább egy ajándékot. Aladár kapja a-t vagy b-t, vagy c-t. Balambér kettőt kap. A többiekről nem tudunk semmit. Hányféleképpen kaphatják meg a srácok az ajándékaikat? *(6 pont)*

1. feladat megoldás:

1. megoldás: Aladár 3-féle ajándékot kaphat, *(1 pont)*
a maradék 5 ajándékból egyet-egyet Csaba, Dorián és Ede között $5*4*3$-féleképpen oszthatunk ki. *(2 pont)*
A maradék 2 ajándékot Balambér kapja (ez egyféleképpen lehetséges). *(1 pont)*
Összesen $3*5*4*3 =$ *(1 pont)*
$= 180$-féle ajándékozás lehetséges. *(1 pont)*

2. megoldás: Aladár 3-féle ajándékot kaphat, *(1 pont)*
ezután Balambér $5*4:2 = 10$-féleképpen kaphatja meg a 2 ajándékát. *(2 pont)*
A maradék 3 ajándékot $3*2*1$-féleképpen oszthatjuk ki, *(1 pont)*
összesen pedig $3*10*3*2*1 =$ *(1 pont)*
$= 180$-féle ajándékozás lehetséges. *(1 pont)*

2. feladat: Egy konferencián találkozik 5 ember. Tudjuk, hogy van közöttük pontosan egyvalaki, aki egy A típusú vírussal fertőzött, valamint azt is tudjuk, hogy van közöttük valaki, aki egy B típusú vírussal fertőzött. Kézfogás útján terjed a vírus.

a) Mi a kézfogások minimális száma, hogy mindenki fertőzött legyen mindkét vírussal?

b) Mi a kézfogások maximális száma, hogy mindenki fertőzött legyen mindkét vírussal, ha azok, akik már egyszer kezet fogtak nem fognak kezet többször?

(6 pont)

2. feladat megoldás:

a) A kézfogások minimális száma 4. Ha az A és a B vírus egy emberben található meg eredetileg, akkor elég, ha ő mindenkivel kezet fog. *(1 pont)*
Ha az A és a B vírus két különböző emberben van jelen, akkor először ők fognak kezet, ekkor már mindketten fertőzöttek mindkét vírussal, majd egyikük kezet fog a maradék három emberrel és megfertőzi őket mindkét vírussal. *(1 pont)*
Három kézfogás nem elég, mert lesz olyan ember, vagy emberpár, akik nem fogtak kezet egymással és így nem fertőzték meg egymást. (Nem lesz összefüggő a gráf.) *(1 pont)*

b) A kézfogások maximális száma 10. Ha az A vírussal eredetileg fertőzött ember előtt a többiek kezet fognak, ez 6 kézfogás. Köztük biztosan nem lesz még A típusú fertőzött. Ezt követően a kimaradt embernek mindenkivel kezet kell fognia, hogy mindenki fertőzött legyen az A vírussal, ez további 4, összesen 10 kézfogást jelent. *(2 pont)*
Több nem lehetséges, mert 10-nél több kézfogás nem lehetséges 5 ember között, viszont ha mindenki

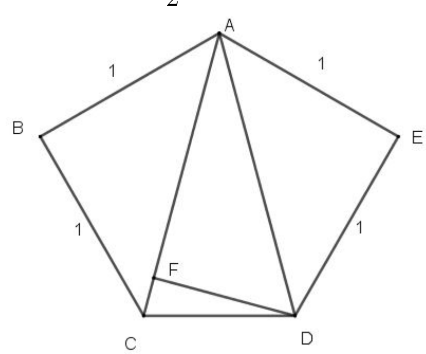
mindenkivel kezet fog, akkor mindenki mindennel fertőzött lesz. *(1 pont)*

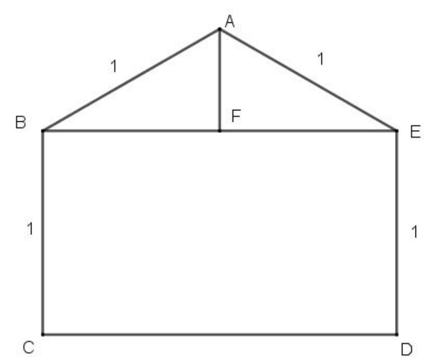
Ha megtalálja a diák a minimális/maximális konstrukciót, de nem jelenik meg az indoklásában az annál kevesebb/több létezésének cáfolata, akkor max 4 pont.

3. feladat: Tengelyesen szimmetrikus konvex ötszög szögei $120°$ és $90°$ fokosak. Négy oldalának hossza 1 egység. Mekkora lehet a területe? *(6 pont)*

3. feladat megoldás: Az ötszög belső szögeinek összege $540°$. Ez csak úgy jöhet létre, ha pontosan három $120°$-os és kettő $90°$-os szöge van. *(1 pont)*
A szimmetriatengelye áthalad egy csúcson és egy oldalfelezőponton. A csúcs nem lehet más, mint az egyik $120°$-os szög, az oldal pedig az, amelyik nem 1 egység. Ebből pontosan kétféle ötszög van. *(1 pont)*
Ha nem indokol, csak a megoldásból derül ki, ez a pont akkor is jár.

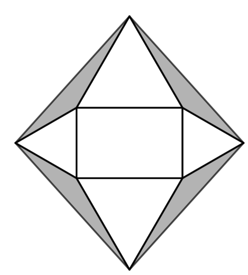
Egyik eset: A megfelelő segédvonalak behúzása után látható két derékszögű, egyenlő szárú háromszög, amik szárai 1 egység hosszúak, vagyis összterületük pontosan 1 egység. *(1 pont)*
Valamint egy $30°, 75°, 75°$-os háromszög, aminek a szára Pitagorasz-tételből $\sqrt{2}$ egység, a magassága pedig a félszabályos ADF háromszögből $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Így a területe $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.
Így az ötszög területe $\frac{3}{2}$ egység. *(1 pont)*





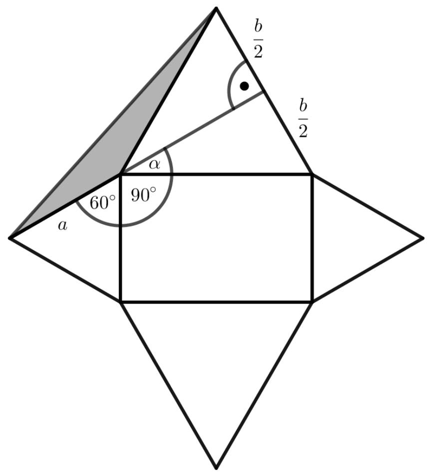
Másik eset: A megfelelő segédvonalak behúzása után látható egy téglalap és két félszabályos háromszög. A félszabályos háromszög befogóinak hossza $\frac{1}{2}$, illetve $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *(1 pont)*
Innen a téglalap területe $1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ egység, a két háromszög területe pedig a befogóik szorzata $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Így az ötszög területe $\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{4}$. *(1 pont)*

4. feladat: Rajzolj egy téglalap oldalai fölé szabályos háromszögeket az ábrán látható módon! Igazold, hogy a szürke terület egyenlő a téglalap területével!



(6 pont)

4. feladat megoldás: Nézzük először az egyik háromszög területét! Húzzuk be az oldalegyenest az ábrán látható módon, ekkor $\alpha = 30°$. *(1 pont)*
Azaz a b oldalra emelt szabályos háromszögben ez az egyenes felezi a szemköztes oldalt. *(1 pont)*
A szürke háromszög a egység hosszúságú oldalához tartozó magasság $\frac{b}{2}$. *(2 pont)*
Vagyis a háromszög területe $a \cdot \frac{b}{2} : 2 = \frac{ab}{4}$. Így a négy háromszög területe ab. *(1 pont)*
A téglalap területe ab. Tehát tényleg megegyeznek a területek. *(1 pont)*



5. feladat: Egy 8×8-as sakktábla az ábrán látható módon van kitöltve számokkal. Mutassuk meg, hogy akárhogyan is teszünk fel a táblára 8 bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást, az alattuk lévő számok összege 0 lesz.

0	1	2	3	4	5	6	7
-1	0	1	2	3	4	5	6
-2	-1	0	1	2	3	4	5
-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

(6 pont)

5. feladat megoldás: Vegyük észre, hogy az i. sor j. eleme $j - i$-vel egyenlő. *(3 pont)*
Ha a nyolc bástyát a feladatban kért módon helyezzük fel, akkor a kisebbítendők és a kivonandók helyén is 1-től 8-ig minden szám pontosan egyszer fog szerepelni. *(2 pont)*
Így ezek összege/különbsége pontosan 0 lesz. *(1 pont)*

Ha a diák arra hivatkozik, hogy két bástya által kijelölt téglalapban kicseréli a bástyák helyzetét a másik átlóra és ott nem változik az összeg, ez 4 pont. Ha azt is belátja, hogy a főátlóból indulva minden állás létrejöhet, akkor kaphatja csak meg a maximális pontot.

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Kiss Géza