Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
6. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Egy deltoid két szöge $100°$ és $70°$. Mekkora lehet a másik két szög különbsége? *(6 pont)*

1. feladat megoldás: Mivel a deltoid egy tengelyesen szimmetrikus alakzat, a négy szögéből kettőnek az értéke meg fog egyezni.
(Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, a tanuló akkor is kapja meg a pontot.) *(1 pont)*
Tetszőleges négyszögben igaz, hogy a belső szögeinek összege egyenlő $360°$-al. *(1 pont)*
Jelöljük a deltoid szögeit rendre $\alpha, \beta, \alpha, \gamma$-val és bontsuk esetekre a megoldást.

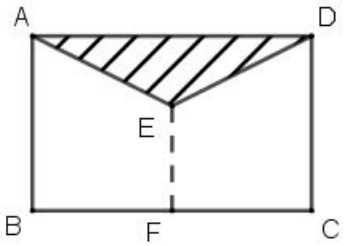
1. eset: $\alpha = 100°$ és $\beta = 70°$, akkor a $\gamma = 90°$, tehát a keresett különbség az $|\alpha - \gamma| = 10°$. *(1 pont)*
(Ezzel megegyező az $\alpha = 100°$ és $\gamma = 70°$ eset.)

2. eset: $\beta = 100°$ és $\alpha = 70°$, akkor a $\gamma = 120°$, tehát a keresett különbség az $|\alpha - \gamma| = 50°$. *(1 pont)*
(Ezzel megegyező a $\gamma = 100°$ és $\alpha = 70°$ eset.)

3. eset: $\beta = 100°$ és $\gamma = 70°$, akkor a maradék két α szög megegyezik, így a különbségük $0°$. *(1 pont)*
(Ezzel megegyező a $\gamma = 100°$ és $\beta = 70°$ eset.)

Több eset nincs, tehát a két szög különbsége $0°, 10°$ vagy $50°$ lehet. *(1 pont)*

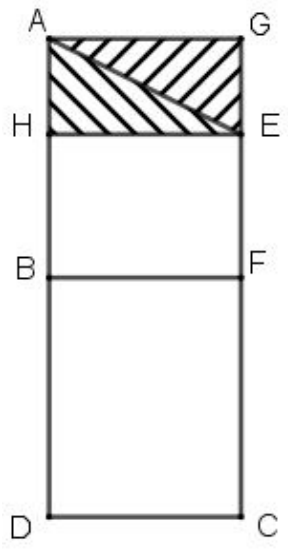
2. feladat: Az ábrán látható $ABCD$ téglalap alakú boríték satírozott részének területe negyedakkora, mint a fehér részének a területe. Mekkora az EF szakasz hossza, ha a téglalap AB oldala 10 cm hosszú, BC oldalát azonban nem ismerjük? (EF párhuzamos AB-vel, és azonos távolságra van az AB és a CD oldaltól.)



(6 pont)

2. feladat megoldás: Jelöljük a BC oldal hosszát a-val. Daraboljuk át az ábrát egy $20 \times \frac{a}{2}$-es téglalappá és ott illesszük egymás mellé a két satírozott háromszöget, ahogy azt az ábra is mutatja. *(2 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Gyenes Zoltán, Lenger Dániel



Így a satírozott és a fehér részt is egy-egy téglalappá daraboltuk át. A téglalapok területének aránya megegyezik az AH és HD szakaszok hosszának arányával, ami $1:4$. *(2 pont)*
Legyen az AH szakasz hossza x. Így igaz, hogy $x + 4 \cdot x = 20$, amiből $x = 4$ cm. *(1 pont)*
Az EF szakasz hossza pedig megegyezik az $AB - AH$ hosszal, ami $10 - 4 = 6$ centiméter. *(1 pont)*

3. feladat: Egy $ABCDE$ ötszög mindegyik csúcsát piros, kék vagy sárga színűre színezzük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha nincs két szomszédos kék csúcs? *(6 pont)*

3. feladat megoldás: Ha három, vagy annál több kék pont van, akkor azok között biztosan lesz kettő, amik szomszédosak. *(1 pont)*
Innentől 3 esetet különböztetünk meg:

Ha 0 kék csúcs van köztük: Minden csúcs piros vagy sárga lehet egymástól függetlenül, ez $2^5 = 32$ eset. *(1 pont)*

Ha 1 kék csúcs van köztük: Kiválasztjuk az egyetlen kék csúcsot, ezt ötféleképpen tehetjük meg, a maradék négy csúcs pedig megint piros vagy sárga lehet, ami $5 \cdot 2^4 = 80$ esetet jelent. *(1 pont)*

Ha 2 kék csúcs van köztük: Kiválasztjuk a két kék csúcsot úgy, hogy ne legyenek egymás mellett, ezt 5-féleképpen tehetjük meg, a maradék három csúcsot pedig megint pirosra vagy sárgára színezhetjük, így $5 \cdot 2^3 = 40$ esetet jelent. *(2 pont)*

Így összesen $32 + 80 + 40 = 152$-féleképpen tehetjük ezt meg. *(1 pont)*

4. feladat: Egy laboratórium két távoli szobájában egy-egy gépet helyeztek el. Az első szobában a gép mindig kiírja a memóriájában lévő aktuális számot, kezdetben 0-t mutat. A második szobában a gépen lévő három nyomógombbal műveleteket végezhetünk, és ezek eredménye folyamatosan megjelenik az első szobában lévő gép kijelzőjén. Az egyik nyomógomb az aktuális számhoz 1-et hozzáad, egy másik 1-et

kivon, a harmadik pedig a számot 2-vel szorozza. Sajnos nem tudjuk, melyik gomb melyik műveletet végzi. Bármelyik gombot akárhányszor megnyomhatjuk, majd átsétálhatunk az első szobába, és megnézhetjük, hogy milyen értéket kaptunk a kijelzőn. Ezután szükség esetén visszasétálhatunk a második szobába, és újra próbálkozhatunk a gombok nyomogatásával. Határozzuk meg, melyik gomb melyik műveletet végzi úgy, hogy a lehető legkevesebbszer sétáljunk át az első szobába! *(6 pont)*

4. feladat megoldás: Legyen a három gomb A, B és C. Megmutatjuk, hogy egyetlen gombsorozattal is ki tudjuk találni, hogy melyikhez melyik művelet tartozik. Hat esetet fogunk végignézni és ha mindegyik műveletsor eredménye különböző lesz, akkor tudni fogjuk, hogy melyik gombhoz melyik művelet tartozik. *(2 pont)*
(Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, a tanuló akkor is kapja meg a pontot.)
Legyen ez a sorozat az A, A, A, B.

I. $+1, +1, +1, -1$ esetén az eredmény: 2;

II. $+1, +1, +1, \times 2$ esetén az eredmény: 6;

III. $-1, -1, -1, +1$ esetén az eredmény: -2;

IV. $-1, -1, -1, \times 2$ esetén az eredmény: -6;

V. $\times 2, \times 2, \times 2, +1$ esetén az eredmény: 1;

VI. $\times 2, \times 2, \times 2, -1$ esetén az eredmény: -1;

(4 pont)
(Több különböző gombnyomássorozat is létezik, például az A, B, A vagy az A, A, A, B, B, C, stb., a lényeg, hogy ellenőrizze, hogy mind a hat eredmény különböző legyen. Ekkor megadható a maximális pontszám.)

1-nél kevesebb gombnyomássorozat nyilvánvaló okok miatt nem elegendő.

(Ha a tanuló 2 gombnyomássorozattal oldja meg a feladatot jól, kapjon 2 pontot, ha 2-nél többel, akkor maximum 1 pontot.)

5. feladat: A sakktábor egyik edzésén hatan gyűltek össze. Az edző mindegyiküktől megkérdezte, hogy a jelenlévők közül hány résztvevővel játszott már korábban. Az első három válasz $5, 5, 3$ volt. Lehetett-e a másik három válasz

a) $2, 2, 2$;

b) $2, 2, 1$;

c) $2, 3, 4$?

(Ez három különböző feladat!) *(6 pont)*

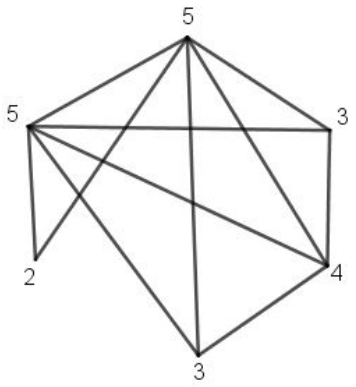
5. feladat megoldás:

a) Nem lehetséges, mert azon párosok száma, akik már játszottak egymással $\frac{5+5+3+2+2+2}{2} = 9,5$ lenne, ami lehetetlen, mert nem egész szám. *(1+1 pont)*

b) Nem lehetséges, mert ha ketten már 5-5 másikkal játszottak, az azt jelenti, hogy ők már mindenkivel játszottak. Vagyis mindenki játszott ellenük, így senkinek sem lehet a válasza 2-nél kevesebb. *(1+1 pont)*

c) Lehetséges, egy megoldást az ábra mutat!

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Gyenes Zoltán, Lenger Dániel



(1+1 pont)

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Gyenes Zoltán, Lenger Dániel