

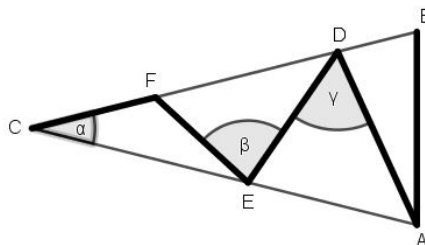
Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
7. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Három francia és három magyar tanuló felsorakozik. Hányféleképpen állhatnak sorba, ha tudjuk, hogy a három francia – valamilyen sorrendben – egymás mellett áll? (6 pont)

1. feladat megoldás: Mivel a három francia tanuló egymás mellett áll, ezért ők az 1-6. hely közül négyféleképpen foglalhatnak el három helyet; az 1-3., a 2-4., a 3-5., vagy a 4-6. helyeket a sorban. (1 pont)
A három kijelölt helyen a három francia tanuló $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen foglalhat helyet. (1 pont)
A maradék három helyen, függetlenül attól, hogy ezek hol vannak, szintén $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen foglalhat helyet a három magyar tanuló. (2 pont)
Ez összesen $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ féle lehetőség. (2 pont)

2. feladat: Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AC = BC$, valamint a szárazon felvett D, E és F pontokra igaz, hogy $AB = AD = DE = EF = FC$. Mekkora az ábrán jelölt α, β és γ szögek összege?



(6 pont)

2. feladat megoldás: Az EFC háromszög egyenlőszárú, ezért $CEF\angle = \alpha$. Mivel a $CDE\angle$ -höz tartozó külső szög a háromszög másik két szögével egyenlő, ezért $DFE\angle = 2\alpha$. (1 pont)
Mivel FED háromszög is egyenlőszárú, ezért $FDE\angle = 2\alpha$, és az FED szöghöz tartozó külső szöge ezért 4α lenne. Ez a külső szög ugyanakkora, mint $CEF\angle + DEA\angle$, hiszen nagyságuk 180° .
Tehát $DEA\angle = 4\alpha - CEF\angle = 3\alpha$. (1 pont)
Mivel EAD háromszög is egyenlőszárú, ezért $EAD\angle = 3\alpha$ és $ADB\angle + EDF\angle = 180^\circ - \gamma = 6\alpha$. Ezért $ADB\angle = 6\alpha - 2\alpha = 4\alpha$. (1 pont)
Mivel ABD háromszög egyenlőszárú, ezért $DBA\angle = 4\alpha$. ABC háromszög két alapon fekvő szöge egyenlő, ezért $DBA\angle = CAB\angle = 4\alpha$, szárszöge α , ezért $180^\circ = 9\alpha$, $\alpha = 20^\circ$. (1 pont)
 FED háromszög belső szögeinek összegéből kifejezve $\beta = 180^\circ - 4\alpha = 100^\circ$. (1 pont)
 EDA háromszög belső szögeiből adódóan $\gamma = 180^\circ - 6\alpha = 60^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = 20^\circ + 100^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. (1 pont)

3. feladat: A Nagy és a Kis család, valamint Kovács Béla ugyanabban a pizzériában ebédelt. A Nagy Család 4 pizzát, 1 üdítőt és 3 süteményt rendelt, és ezért összesen 15 360 Ft-ot fizettek. A Kis család 1 pizzát, 4 üdítőt és 2 süteményt kért, nekik mindez 7 090 Ft-ba került. Kovács Béla 1 pizzát, 1 üdítőt és 1 süteményt fogyasztott. Mennyit kellett fizetnie, ha a pizzák, üdítők és sütemények íztől függetlenül azonos árban vannak? (6 pont)

3. feladat megoldás: Ha a Nagy és a Kis család együtt rendelt volna, akkor összesen 5 pizzát, 5 üdítőt, és 5 süteményt rendeltek volna. (2 pont)

Ha együtt is fizettek volna a közös rendelésért, akkor összesen $15\,360 + 7\,090 = 22\,450$ Ft-ot fizettek volna. (2 pont)

Így Kovács Béla 1 pizzáért, 1 üdítőért és 1 süteményért ennek az ötödét, vagyis $22\,450 : 5 = 4490$ Ft-ot fizetett. (2 pont)

4. feladat: Hány olyan 3 jegyű pozitív egész szám létezik, amelyekre az alábbi három tulajdonságból pontosan kettő igaz?

I. A szám osztható 3-mal.

II. A szám osztható 6-tal.

III. A szám 24-re végződik.

(6 pont)

4. feladat megoldás: Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal is. Mivel az állítások közül pontosan kettő igaz, egy hamis, ezért nem lehet, hogy a II. és a III. igaz, de az I. nem. (1 pont)

Ha egy szám 24-re végződik, akkor páros. Ha egy szám páros és 3-mal osztható, akkor 6-tal is osztható. Ezért nem lehet, hogy az I. és a III. állítás igaz, de a II. nem. (1 pont)

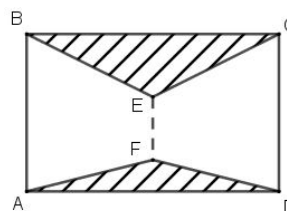
Így csak az fordulhat elő, hogy az I. és a II. állítás igaz, de a III. nem.

Azokat a 3 jegyű pozitív egész számokat kell összeszámolni, amelyek 6-tal oszthatóak, de nem 24-re végződnek. 100-tól 999-ig 900 db szám van, $900 : 6 = 150$, és nincs maradék, tehát ha az egymást követő számokat hatosával csoportosítjuk, akkor minden csoportban 1 db hattal osztható szám lesz, összesen tehát 150 darab 6-tal osztható háromjegyű szám van. (2 pont)

Ezek közül ki kell vonni azoknak a számát, amelyek 24-re végződnek. Ha egy szám 24-re végződik, akkor páros. Ahhoz, hogy 6-tal osztható is legyen, a számjegyek összege 3-mal osztható kell, hogy legyen. Mivel $2 + 4 = 6$, ezért a 2 és a 4 mellé a 0, 3, 6, 9 számjegyek választhatóak, de 0 nem lehet az első számjegy. Tehát három olyan szám van, ami 6-tal osztható és 24-re végződik: a 324, a 624 és a 924. (1 pont)

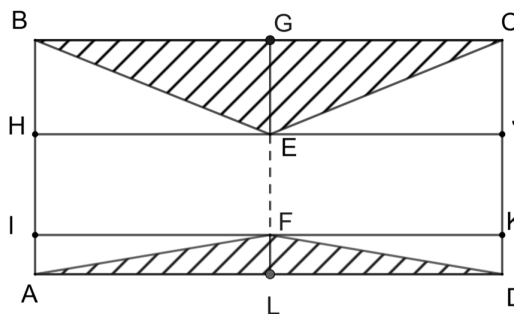
Tehát összesen $150 - 3 = 147$ a feltételeknek megfelelő szám van. (1 pont)

5. feladat: Az $ABCD$ téglalap fehér részének területe ötször akkora, mint a satírozott részek összterülete. Mekkora a téglalap AB oldalának a hossza, ha a szaggatottal jelölt EF szakasz 5 cm hosszú? (Az EF szakasz párhuzamos és ugyanolyan távol van a téglalap AB és CD oldalától.)



(6 pont)

5. feladat első megoldás: Húzzunk párhuzamost az E és F pontokon keresztül a téglalap AB és AD oldalával! Így keletkeznek a G és L, valamint a H, J, I, és K, mint a téglalap oldalaival vett metszéspontok, ahogyan ezt a mellékelt ábra is szemlélteti. (1 pont)



Mivel az AFLI, FLDK, EJCG és EGBH téglalapok területét felezik a behúzott átlók (AF, DF, EC és EB

átlók), ezért az EBH, ECJ, FIA és FKD derékszögű háromszögek együttes területe megegyezik a satírozott részek területével. (1 pont)

Legyen a satírozott részek területe x . Ekkor a BHJC és IADK téglalapok területének összege $2x$, ezekben a téglalapokban a fehér részek területe x . (1 pont)

A fehér részek összterülete ötször akkora, mint a satírozott részeké, ezért a HIKJ téglalap területe $5x - x = 4x$. (1 pont)

Mivel $T_{BHJC} + T_{IADK} = 2x$, $T_{HIKJ} = 4x$, valamint a BHJC, IADK és HIKJ téglalapoknak a BC, HJ, IK és AD oldala ugyanakkora, ezért $(AI + HB) : IH = 2 : 4$. (1 pont)

Mivel EF és IH ugyanolyan hosszú, ezért $DC = \frac{5}{4} \cdot 6 = \frac{30}{4} = 7,5$ cm. (1 pont)

5. feladat második megoldás: Az első megoldásban szereplő ábra betűzését használjuk.

Jelölje AB szakasz hosszát a , BC szakasz hosszát b , EG szakasz hosszát x , FL szakasz hosszát y . Tudjuk, hogy EF szakasz hossza 5 cm.

$$T(BEC) + T(AED) = \frac{b \cdot x}{2} + \frac{b \cdot y}{2} = \frac{b \cdot (x + y)}{2}$$

(1 pont)

Az ABCD téglalap területe:

$$T(ABCD) = (5 + x + y) \cdot b$$

(1 pont)

Ha a satírozott részek területének ötszöröse a fehér területek összege, akkor a satírozott részek területének hatszorosa az ABCD téglalap területe. (1 pont)

Ebből felírható a következő egyenlet:

$$T(ABCD) = \frac{b \cdot (x + y)}{2} \cdot 6 = (5 + x + y) \cdot b$$

(1 pont)

Legyen $z = x + y$. A fenti egyenlet átírható a következő alakba:

$$T(ABCD) = b \cdot z \cdot 3 = (5 + z) \cdot b = 5b + zb$$

(1 pont)

Ebből egyenletrendezéssel következik: $2zb = 5b$, vagyis $2z = 5$, $z = 2,5$, tehát $b = 5 + 2,5 = 7,5$. (1 pont)