

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
8. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontoszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Egy futóversenyen öten érkeztek a célba, Anna, Béla, Cili, Dóri és Ede. Hányféle sorrendben végezhettek, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt közöttük, és Anna megelőzte Bélát, valamint Cili megelőzte Dórit? (A "megelőzés" nem csak szomszédokra vonatkozhat, pl. Anna, Ede, Béla sorrend esetén Anna megelőzi Bélát.) (6 pont)

1. feladat első megoldás: Az öt versenyző $5! = 120$ -féle sorrendben végezhet. (2 pont)
Az esetek felében előzi meg Anna Bélát (minden Anna–Béla sorrendhez párosíthatunk egy Béla–Annát), és ezen esetek felében előzi meg Cili Dórit (Cili és Dóri szerepe is szimmetrikus). (2 pont)
Eredmény: $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$. (2 pont)

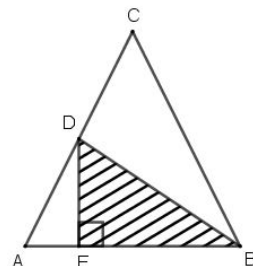
1. feladat második megoldás: (a célba érkezési helyeket rögzítjük): Anna és Béla a helyezéseket tekintve $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen érkezhet célba. (Például Anna 5-féle, Béla 4-féle helyezést érhet el, de az $5 \cdot 4$ esetnek csak a fele jó, amikor Anna megelőzi Bélát.) (2 pont)
A maradék 3 helyre Cili és Dóri $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen érkezhet (egy hely marad üresen a 3-ból), (2 pont)
és ekkor Ede helyezése már egyértelmű. (1 pont)
Eredmény: $10 \cdot 3 = 30$. (1 pont)

Vagy: A maradék 3 hely bármelyikére érkezhet Ede, és ekkor már Cili és Dóri helyezése egyértelmű.

1. feladat harmadik megoldás: (a célba érkező személyeket rögzítjük): Anna és Béla sorrendje adott, hozzájuk képest Cili 3-féleképpen érkezhet célba. (1 pont)
Ha Cili megelőzi Annát és Bélát, akkor Dóri 3 helyre érkezhet:
Anna elé, Anna és Béla közé Béla mögé. (1 pont)
Ha Cili Anna és Béla között végez, akkor Dóri 2 helyre érkezhet (Béla elé vagy mögé), ha pedig Cili Béla után végez, akkor Dórinak 1 hely marad. (1 pont)
Ha tehát "rögzítjük" Annát és Bélát, akkor Cili és Dóri $3 + 2 + 1 = 6$ -féleképpen érkezhet célba. (1 pont)
Végül ha Anna, Béla, Cili és Dóri sorrendje adott, akkor Ede 5 helyen végezhet. (1 pont)
Eredmény: $6 \cdot 5 = 30$. (1 pont)

1. feladat negyedik megoldás: (formálisan): Mivel Anna és Béla, valamint Cili és Dóri egymás közötti sorrendje rögzített, jelöljük A, A, C, C módon négyüket (és E -vel Edét). (2 pont)
Ekkor az A, A, C, C, E betűk minden lehetséges sorrendjét kell meghatároznunk, (2 pont)
ezek száma $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$. (2 pont)

2. feladat: Az ABC egyenlőszárú háromszög AC szárának felezőpontja D . A D -ből az AB oldalra állított merőleges talppontja E . Hányadrésze az EBD háromszög területe az ABC háromszög területének?



(6 pont)

2. feladat megoldás: A C -ből húzott magasság AB oldalon lévő talppontját jelölje F . Az AFC háromszögben ED középvonal, mert párhuzamos FC -vel, és D az AC oldal felezőpontja.

$$ED = \frac{1}{2}FC. \quad (2 \text{ pont})$$

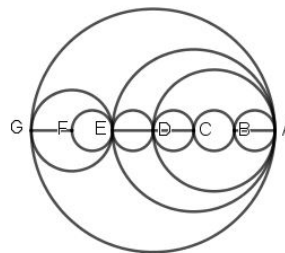
$AF = FB$ (mert a háromszög egyenlőszárú), és $AE = EF$ (mert ED középvonal az AFC háromszögben), ezért $EB = \frac{3}{4}AB$. (2 pont)

Az EBD háromszög EB alapja $\frac{3}{4}$ része az ABC háromszög AB alapjának, ED magassága fele az FC magasságnak, így az EBD háromszög területe $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ része az ABC háromszög területének. (2 pont)

2. feladat második megoldás: Más megoldási lehetőségek (útmutatás): A DBC háromszög területe fele ABC területének (CD alapja fele CA -nak), az AED háromszög területe $\frac{1}{8}$ része ABC területének (mert az ACF területének negyede).

Ezeket kivonva a teljes területből, a fennmaradó EBD háromszög területe $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ része ABC területének.

3. feladat: Hány út vezet A -ból G -be, ha a vonalak (körívek) mentén haladva G -hez folyamatosan közelíteni kell?



(6 pont)

3. feladat megoldás: Jelöljük $a, b, c, \dots, g$ -vel az $A, B, C, \dots, G$ pontba vezető utak számát.

$$a = 1 \text{ (innen indulunk);}$$

$$b = 3a = 3; \quad (1 \text{ pont})$$

$$c = 2b = 6 \text{ (mert } C\text{-be csak } B\text{-ből érkezhetünk 2-féleképpen);} \quad (1 \text{ pont})$$

$$d = 3c + 2a = 20 \text{ (vagy } C\text{-ből három, vagy } D\text{-ből kétféle módon érkezhetünk);} \quad (1 \text{ pont})$$

$$e = 3d + 2a = 62; \quad (1 \text{ pont})$$

$$f = 2e = 124; \quad (1 \text{ pont})$$

$$g = f + 2e + 2a = 250; \text{ ennyi a megfelelő utak száma.} \quad (1 \text{ pont})$$

4. feladat: Egy laboratórium két távoli szobájában egy-egy gépet helyeztek el. Az első szobában a gép mindig kiírja a memóriájában lévő aktuális számot, kezdetben 0-t mutat. A második szobában a gépen lévő három nyomógombbal műveleteket végezhetünk, és ezek eredménye folyamatosan megjelenik az első szobában lévő gép kijelzőjén. Az egyik nyomógomb az aktuális számhoz 1-et hozzáad, egy másik 1-et kivon, a harmadik pedig a számot 2-vel szorozza. Sajnos nem tudjuk, melyik gomb melyik műveletet végzi. Bármelyik gombot akárhányszor megnyomhatjuk, majd átsétálhatunk az első szobába, és megnézhetjük,

hogy milyen értéket kaptunk a kijelzőn. Ezután szükség esetén visszasétálhatunk a második szobába, és újra próbálkozhatunk a gombok nyomogatásával. Határozzuk meg, melyik gomb melyik műveletet végzi úgy, hogy a lehető legkevesebbszer sétáljunk át az első szobába! (6 pont)

4. feladat megoldás: Legyen a három gomb A, B és C . Megmutatjuk, hogy egyetlen gombsorozattal is ki tudjuk találni, hogy melyikhez melyik művelet tartozik. Hat esetet fogunk végignézni és ha mindegyik műveletsor eredménye különböző lesz, akkor tudni fogjuk, hogy melyik gombhoz melyik művelet tartozik. (2 pont)

(Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, a tanuló akkor is kapja meg a pontot.)

Legyen ez a sorozat az A, A, A, B .

I. $+1, +1, +1, -1$ esetén az eredmény: 2;

II. $+1, +1, +1, \times 2$ esetén az eredmény: 6;

III. $-1, -1, -1, +1$ esetén az eredmény: -2;

IV. $-1, -1, -1, \times 2$ esetén az eredmény: -6;

V. $\times 2, \times 2, \times 2, +1$ esetén az eredmény: 1;

VI. $\times 2, \times 2, \times 2, -1$ esetén az eredmény: -1;

(4 pont)

(Több különböző gombnyomássorozat is létezik, például az A, B, A vagy az A, A, A, B, B, C , stb., a lényeg, hogy ellenőrizze, hogy mind a hat eredmény különböző legyen. Ekkor megadható a maximális pontszám.)

1-nél kevesebb gombnyomássorozat nyilvánvaló okok miatt nem elegendő.

(Ha a tanuló 2 gombnyomássorozattal oldja meg a feladatot jól, kapjon 2 pontot, ha 2-nél többel, akkor maximum 1 pontot.)

5. feladat: Add meg az összes olyan x és y valós számot, amelyre:

$$|x| + |y| = 3;$$

$$|x + 1| + |y + 1| = 1,5;$$

(6 pont)

5. feladat megoldás: A két egyenletből észrevehetjük, hogy nagyobb számok abszolút értékének összege kisebb. Ezért érdemes az

$$|x| + |y| - |x + 1| - |y + 1| = 3 - 1,5 = 1,5$$

különbséget vizsgálni.

Egy tetszőleges x számra a következők teljesülnek: Ha $x > 0$, akkor $|x| - |x + 1| = -1$.

Ha $x \leq -0,5$, akkor $-1 < |x| - |x + 1| \leq 0$.

Ha $-1 < x < -0,5$, akkor $|x| - |x + 1| < 1$.

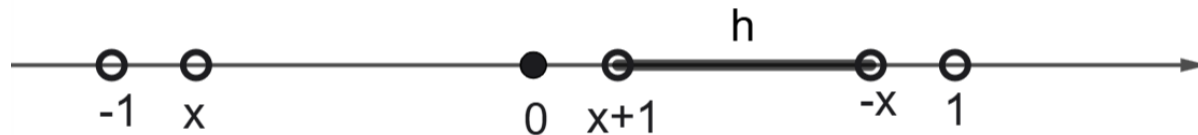
Ha $x \leq -1$, akkor $|x| - |x + 1| = 1$.

(1 pont)

Mivel $|x| + |y| - |x + 1| - |y + 1| = |x| - |x + 1| + |y| - |y + 1| = 1,5$, ezért a fentiek következtében az $|x| - |x + 1|$ és $|y| - |y + 1|$ különbségek közül vagy az egyik 1, a másik 0,5, vagy mind a kettő 1-nél kisebb és pozitív. De ez utóbbi eset nem lehetséges, mert ekkor $-0,5 \leq x \leq 0$ és $-0,5 \leq y \leq 0$ lenne, de ekkor $|x| + |y| < 2$ teljesülne. (1 pont)

Tehát az x és y számok közül az egyik -1 -nél nem nagyobb, a másik -1 és $-0,5$ között van. Ábrázoljuk számegyenesen az $-1 < x < -0,5$ esetet.

$$h = |x| - |x + 1| = -x - (x + 1) = -2x - 1.$$



Tehát $1 - 2x - 1 = 1,5$, ebből következik, hogy $x = -0,75$, $y = -2,25$.

Az x és y számok szerepe felcserélhető, vagyis $y = -0,75$, $x = -2,25$ is jó megoldás.

(2 pont)

(1 pont)

(1 pont)