

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
6. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontoszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Egy osztály öt tanulója közül az egyik betörte az ablakot a szünetben. A gyerekek nem szeretnek árulkodni, ezért négyen közülük a következőket mondják:

Anna: Az ablakot nem Dóra törte be.

Béla: Az ablakot nem Elemér törte be.

Csaba: Az ablakot nem Anna törte be.

Dóra: Az ablakot nem Béla törte be.

Ki törhette be az ablakot, ha tudjuk, hogy az *ártatlanok* mindig igazat mondanak? (Aki betörte az ablakot, az lehet, hogy igazat mond, de az is lehet, hogy hazudik.) (6 pont)

1. feladat megoldás: Dóra nem törhette be az ablakot, mert akkor az ártatlan Anna nem mondana igazat. (1 pont)

Elemér sem, hasonlóan. Anna sem, és Béla sem. (2 pont)

Tehát az ablakot csak Csaba törhette be, mert ekkor mindenki igazat mond. (3 pont)

Megjegyzés: Ha a versenyző csak annyit ír, hogy Csaba törte be az ablakot, mert ekkor mindenki igazat mond, akkor a 6 pontból 3 pontot kapjon.

2. feladat: A 28 pozitív prímszámok szorzataként $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ alakban írható fel, a felbontásban szereplő prímek összege: $2 + 2 + 7 = 11$. Hány olyan 28-nál nagyobb egész szám van, amelyet ha az előbbi módon felírunk pozitív prímszámok szorzataként, akkor a felbontásban szereplő prímek összege 11 lesz?

2. feladat megoldás: Nézzük hogyan lehet még a prímek összege 11.

A kettes prímtényezők száma szerint rendezve vizsgáljuk az eseteket.

$2+2+2+2+3$, ekkor a szám a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ jó (1 pont)

$2+2+2+5$, ekkor a szám a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ jó (1 pont)

$2+3+3+3$, ekkor a szám $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ jó (1 pont)

$3+3+5$, ekkor a szám $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ jó (1 pont)

Tehát 4 ilyen szám van. (2 pont)

3. feladat: Dobunk egy fehér és egy zöld dobókockával. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a két dobott szám szorzata nem osztható 6-tal

(6 pont)

3. feladat első megoldás: Fehérrel 1-et dobunk, akkor a zölddel : 1, 2, 3, 4, 5-öt dobhatunk. (5 lehetőség) (1 pont)
 Fehérrel 2-t dobunk, akkor a zölddel: 1, 2, 4, 5-öt dobhatunk (4 lehetőség) (1 pont)
 Fehérrel 3-at dobunk, akkor a zölddel: 1, 3, 5-öt dobhatunk (3 lehetőség) (1 pont)
 Fehérrel 4-et dobunk, akkor a zölddel: 1, 2, 4, 5-öt dobhatunk (4 lehetőség) (1 pont)
 Fehérrel 5-öt dobunk, akkor a zölddel: 1, 2, 3, 4, 5-öt dobhatunk (5 lehetőség) (1 pont)
 Összesen $5+4+3+4+5=21$ lehetőség van. (1 pont)

3. feladat második megoldás: Összesen $6 \cdot 6 = 36$ féleképpen dobhatunk. (1 pont)
 Számoljuk meg azokat az eseteket, ahol a szorzat osztható 6-tal.
 Először vizsgáljuk azokat az eseteket, ahol az egyik dobás 3-mal osztható, a másik páros, de nincs a dobások közt 6-os. (1 pont)
 Ekkor vagy a fehér kockával 3-at, a zölddel 2-t, vagy 4-et dobunk, vagy fordítva, a zöld kockával dobunk 3-at, a fehérrel pedig 2-t vagy 4-et. Ez összesen 4 lehetőség. (1 pont)
 Ha van a dobások között 6-os, akkor a szorzat osztható lesz 6-tal.
 Ha a fehér kockával 6-ot dobunk, a zölddel pedig 1-től 5-ig bármit, vagy a zöld kockával dobunk 6-ot és a fehérrel 1-től 5-ig bármit, az 10 lehetőség. (1 pont)
 Dobhatunk mindkét kockával 6-ot, az további 1 lehetőség. (1 pont)
 Tehát összesen $36 - 15 = 21$ dobás esetén nem lesz a szorzat osztható 6-tal. (1 pont)

4. feladat: Van öt borítékunk (piros, kék, sárga, zöld, lila) és öt üdvözlőlapunk (szintén piros, kék, sárga, zöld és lila). Minden borítékba beleteszünk egy-egy üdvözlőlapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha egyik borítékba sem kerülhet a borítékkal megegyező színű üdvözlőlap? (6 pont)

4. feladat megoldás: Legyen a borítékok sorrendje piros, kék, sárga, zöld, lila.
 Először nézzük meg, hogy hány olyan eset van, amikor a piros borítékba kék üdvözlőlap kerül, a kék borítékba pedig piros lap:

boríték színe	piros	kék	sárga	zöld	lila
a üdvözlőlapok sorrendje:	k	p	z	l	s
	k	p	l	s	z

(1 pont)

Majd vizsgáljuk meg azokat az eseteket, ahol a piros borítékba kék, a kék borítékba sárga lap kerül:

boríték színe	piros	kék	sárga	zöld	lila
a üdvözlőlapok sorrendje:	k	s	p	l	z
	k	s	z	l	p
	k	s	l	p	z

(1 pont)

A sárgához hasonlóan ugyanúgy 3-3 eset van, amikor a kék borítékba zöld, illetve a lila üdvözlőlap kerül (a piros borítékban továbbra is a kék üdvözlőlap van). (1 pont)

Összesen $2 + 3 \cdot 3 = 11$ lehetőség van, ha a piros borítékba a kék üdvözlőlap került. (1 pont)

Ha a piros borítékba kerül a sárga üdvözlőlap, az is 11 lehetőség, illetve zöld és lila üdvözlőlap esetén szintén 11-11 a lehetőségek száma. (1 pont)

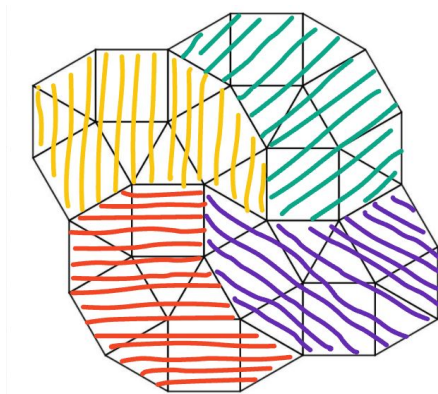
Vagyis az összes lehetőség $4 \cdot 11 = 44$. (1 pont)

Megjegyzés: Ha a versenyző mind a 44 esetet felsorolja, arra is jár a maximális (6) pontszám.

5. feladat: Az alábbi síkidom négyzetekből és szabályos háromszögekből áll. Osszuk fel négy ugyanolyan formájú és méretű, összefüggő alakzatra a rácsvonalak mentén.

(6 pont)

5. feladat megoldás:



(6 pont)

Megjegyzés: Ha a diák nem talál megfelelő konstrukciót, de a következő megállapítást teszi, akkor 2 pontot kapjon: A síkidom 24 háromszögből és 12 négyzetből áll, ezért a 4 egybevágó alakzat mindegyike 6 háromszögből és 3 négyzetből fog állni.

(2 pont)