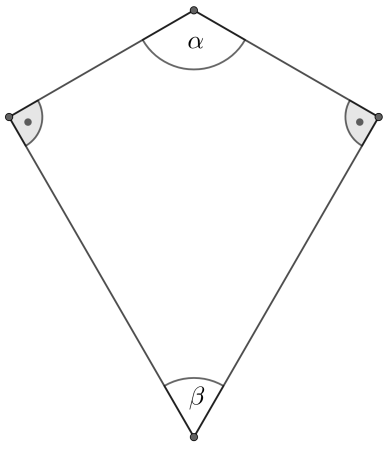
Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
7. osztály
I. forduló
MEGOLDÁSOK

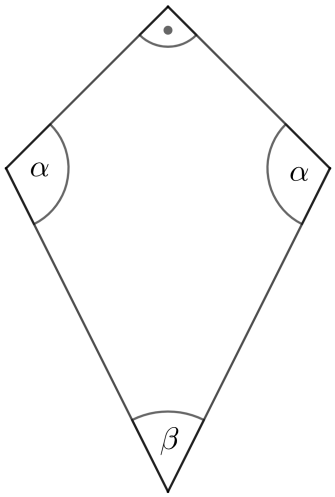
A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Az $ABCD$ deltoidról tudjuk, hogy az A csúcsánál derékszög van. A maradék három szöge közül pedig egyik egy másiknak éppen kétszerese. Mekkorák lehetnek az ABCD deltoid szögei? *(6 pont)*

1. feladat megoldás: A deltoidnak két szembenlevő szöge egyenlő nagyságú.
1. eset: a két ugyanakkora szembenlevő szög derékszög.
Ekkor $\alpha = 2 \cdot \beta$.
Tehát $3 \cdot \beta = 180°$, $\beta = 60°$. *(1 pont)*
Ekkor a a deltoid szögei: $90°, 90°, 60°, 120°$ *(1 pont)*
2. eset: a deltoid két ugyanakkora szembenlevő szög legyen α, ezen kívül a deltoidnak van még egy derékszöge, és a negyedik szögét jelölje β.
Ha $\alpha = 2 \cdot \beta$, akkor $5 \cdot \beta + 90° = 360°$, mert a négyszög belső szögeinek összege $360°$.
Vagyis $5 \cdot \beta = 270°$ és $\beta = 54°$. *(1 pont)*
Ekkor a a deltoid szögei: $54°, 90°, 108°, 108°$ *(1 pont)*
Ha $\beta = 2 \cdot \alpha$, akkor $4 \cdot \alpha + 90° = 360°$. (Ekkor a 2. esethez tartozó ábra nem arányos, mert $\alpha < \beta$).
Ekkor a $4 \cdot \alpha = 270°$, $\alpha = 67,5°$. *(1 pont)*
Ekkor a a deltoid szögei: $67,5°, 67,5°, 90°, 135°$ *(1 pont)*



1. eset



2. eset

2. feladat: Az alábbi 3 állítás mindegyikéről döntsd el, hogy igaz vagy hamis. Válaszaidat indokold!

1) Ha $a < b$, akkor $a^2 < b^2$, ahol a és b tetszőleges számok lehetnek.

2) Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a - c < b - d$, ahol a, b, c és d tetszőleges számok lehetnek.

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Gyenes Zoltán, Lenger Dániel

3) Nagyobb kerületű háromszögnek a területe is nagyobb.

(6 pont)

2. feladat megoldás:

1) Hamis. Egy ellenpélda: $a = -2, b = 1$. *(1+1 pont)*

2) Hamis. Egy ellenpélda: $a = 0, b = 1, c = 0, d = 2$. *(1+1 pont)*

3) Hamis. Egy ellenpélda: Vizsgáljunk egy olyan derékszögű háromszöget, aminek a befogói 1 és 100 hosszúak. Ennek a háromszögnek a területe 50, a kerülete pedig több, mint 200, mivel az átfogó hosszabb a befogóknál.
Illetve vizsgáljunk meg egy olyan derékszögű háromszöget is, aminek a befogói 12 hosszúak. Ennek a területe már 72, vagyis nagyobb, mint az előző háromszögé, viszont a kerülete nem lehet több 48-nál, hiszen az átfogó nem lehet több a befogók hosszának összegénél. *(1+1 pont)*
Megjegyzés: Ha csak rajzol egy hosszúkás háromszöget ellenpédának, de nem írja le ennyire precízen, akkor is járjon neki az 1+1 pont.

3. feladat:

a) Hány olyan 4000-nél nagyobb négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye páratlan, és nincs benne 1-es?

b) Hány olyan 4000-nél nagyobb négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye páratlan, és van benne 9-es?

(6 pont)

3. feladat megoldás: a) Az ezresek helyére a következő számjegyek kerülhetnek: 5, 7, 9. *(1 pont)*
A százasok helyére a következő számjegyek kerülhetnek: 3, 5, 7, 9.
A tízesek helyére a következő számjegyek kerülhetnek: 3, 5, 7, 9.
Az egyesek helyére a következő számjegyek kerülhetnek: 3, 5, 7, 9. *(1 pont)*
Összesen $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ szám van , azaz 192 ilyen szám van. *(1 pont)*
b) 4000-nél nagyobb négyjegyű páratlan számjegyekből álló szám összesen $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 375$ van. *(1 pont)*
Ebből olyan, amelyikben nincs 9-es: $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 128$ van. *(1 pont)*
Azaz 375-128=247 darab számban van kilences. *(1 pont)*

4. feladat: Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani a 30-nál nem nagyobb pozitív egész számok közül úgy, hogy a kiválasztott számok szorzata ne legyen osztható 72-vel? *(6 pont)*

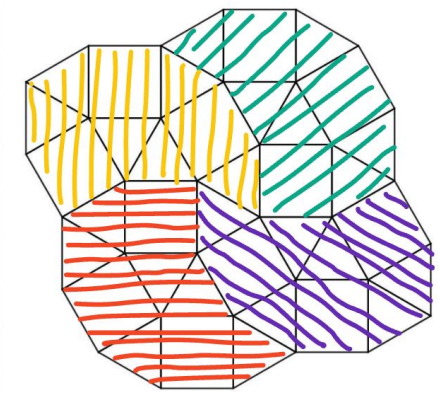
4. feladat megoldás: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
Válogassuk szét az első 30 egész számot csoportokba aszerint, hogy a prímtényezős alakjukban mennyi a kettesek és a hármasok száma.
Nincs benne se kettes, se hármas: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29
Van benne kettes, de nincs hármas: 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28
Van benne hármas, de nincs benne kettes: 3, 9, 15, 21, 27
Van benne kettes és hármas is: 6, 12, 18, 24, 30 *(1 pont)**
Válasszuk ki az első két csoportban levő számokat és még a 3-ast. *(1 pont)**
Ezen számok szorzata még nem osztható 72-vel, mert a szorzat nem osztható 9-cel.
Ez összesen 21 darab szám. *(1 pont)*
Megmutatjuk, hogy 22, vagy annál több szám nem választható ki úgy, hogy a szorzatuk ne legyen osztható 72-vel. Tegyük fel, hogy van ilyen kiválasztás.

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Gyenes Zoltán, Lenger Dániel

Mivel 1-től 30-ig 20 darab 3-mal nem osztható szám van, ezért a kiválasztott számok között van legalább kettő, ami osztható 3-mal, vagyis az összes kiválasztott szám szorzata biztosan osztható lenne 9-cel. *(1 pont)*
Mivel 1-től 30-ig 15 darab páratlan szám van, ezért a kiválasztott számok között van legalább 3 darab páros, vagyis az összes kiválasztott szám szorzata osztható lenne 8-cal. *(1 pont)*
Ha a szorzat osztható lenne 8-cal, és 9-cel, akkor osztható lenne 72-vel is. *(1 pont)*
*Megjegyzések: A * -gal jelölt 2 pontot a versenyző akkor is megkaphatja, ha a következőt írja:* Mivel 1-től 30-ig $30 : 3 = 10$ darab szám osztható 3-mal, ezért 20 darab szám nem osztható 3-mal. Válasszuk ki ezt a 20 számot, és még a 3-at. *(2 pont)*
Ha a versenyző a 3 helyett más 3-mal osztható, de 9-cel nem osztható számot választ a 3-mal nem oszthatóak mellé, természetesen azért a jó konstrukcióért is jár a pont.
Ha a versenyző megállapítja, hogy 15 páratlan szám van, emellé választ két páros, de 4-gyel nem osztható számot, és így arra az egyébként helytelen következtetésre jut, hogy legfeljebb 17 darab szám választható ki a feltételeknek megfelelően, akkor erre a megoldásra 2 pontot kapjon.

5. feladat: Az alábbi síkidom négyzetekből és szabályos háromszögekből áll. Osszuk fel négy ugyanolyan formájú és méretű, összefüggő alakzatra a rácsvonalak mentén. *(6 pont)*

5. feladat megoldás:



(6 pont)
Megjegyzés: Ha a diák nem talál megfelelő konstrukciót, de a következő megállapítást teszi, akkor 2 pontot kapjon: A síkidom 24 háromszögből és 12 négyzetből áll, ezért a 4 egybevágó alakzat mindegyike 6 háromszögből és 3 négyzetből fog állni. *(2 pont)*

A feladatokat összeállította: Ádám Réka, Kocsis Szilveszter, Orosz Gyula, Pereczes Marianna
Lektorálta: Gyenes Zoltán, Lenger Dániel