

**Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye**  
**8. osztály**  
**I. forduló**  
**MEGOLDÁSOK**

A feladatokra általában többféle megoldás adható,  
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.  
A részpontszámok minden esetben bonthatók,  
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

**1. feladat:** Az alábbi 3 állítás mindegyikéről dönts el, hogy igaz vagy hamis. Válaszaidat indokold!

- 1) Ha  $a < b$ , akkor  $a < b^2$ , ahol  $a$  és  $b$  tetszőleges számok lehetnek
- 2) A 3000 felírható 15 darab szomszédos egész szám összegeként.
- 3)  $3^{51} > 6^{30}$ .

(6 pont)

**1. feladat megoldás:**

- 1) Hamis. Egy ellenpélda:  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ . (1+1 pont)
- 2) Igaz. (Mivel  $3000 : 15 = 200$ , így)  $193 + 194 + \dots + 200 + 201 + \dots + 207$  megfelelő. (1+1 pont)
- 3) Igaz. Például:  $6^{30} = 2^{30} \cdot 3^{30} = (2^3)^{10} \cdot 3^{30} < (3^2)^{10} \cdot 3^{30} = 3^{20} \cdot 3^{30} = 3^{50} < 3^{51}$ . (1+1 pont)

**2. feladat:** Pisti megrajzolta az  $ABCDE$  szabályos ötszög oldalait és átlóit, majd eközül a tíz szakasz közül pirosra színezett ötöt. Ezután észrevette, hogy az  $A$  csúcsból elindulva és piros szakaszokon haladva körbe tudja járni az ötszög csúcsait. (Azaz piros szakaszokon haladva az  $A$  csúcsból eljutott egy másik  $X$  csúcsba; onnan egy harmadik  $Y$ -ba; ... végül az ötödik csúcsból visszajutott  $A$ -ba. Az útvonal esetleg metszhette önmagát.) Hányféleképpen színezhette ki Pisti az öt szakaszt, ha az ötszög csúcsai körbejárhatók?  
(6 pont)

**2. feladat megoldás:** A csúcsok egy sorrendje (pl.  $ACDEB$ ) egyúttal egy (éleken történő) bejárást is ad. Feltehetjük, hogy  $A$ -val kezdünk, így az  $A$ -val kezdődő sorrendeket (permutációkat) számoljuk meg. A kezdő  $A$  mögé  $B$ -t,  $C$ -t,  $D$ -t és  $E$ -t  $4! = 24$ -féle sorrendben írhatjuk. (4 pont)

Így azonban – a két lehetséges bejárási irány miatt – minden színezést kétszer számoltunk. (Pl.  $ACDEB$  és  $ABEDC$  bejárások ugyanazt a színezést adják.) Eredmény:  $24 : 2 = 12$  megfelelő színezés van. (2 pont)

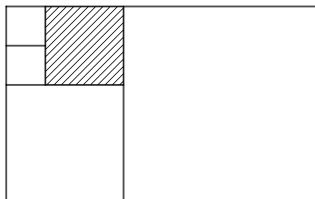
*Megjegyzés: Ha a versenyző felrajzolja mind a 12 esetet, azért is jár a maximális (6) pontszám. Ha kihagy eseteket, akkár a megtalált esetek számával arányosan kapjon részpontokat.*

*2-3 megtalált jó eset: 1 pont, 4-5 jó eset: 2 pont, 6-7 jó eset: 3 pont, 8-9 jó eset: 4 pont, 10-11 jó eset: 5 pont, 12 jó eset: 6 pont. Ha a versenyző rossz eseteket is megad, akkor annyi pontot veszítsen az összpontszámából, ahány rossz színezést is megadott, de a pontszáma ne legyen negatív.*

**3. feladat:** Egy 40 fős kirándulócsoporthat átlagéletkora 8,4 év. A találkozóhelyre egy újabb csoport érkezik, amelyben éppen kétszer annyi gyerek van, mint felnőtt. Tudjuk, hogy a gyerekek átlagéletkora 6 év, a felnőtteké 32 év. A két csoport a kirándulást együtt folytatja. Hányan vannak a második csoportban, ha a két csoport együttes átlagéletkora 12 év?  
(6 pont)

**3. feladat megoldás:** A 40 fős kirándulócsoporthoz 40 · 8, 4 = 336 év. (1 pont)  
 Legyen a felnőttek száma  $n$ . Ekkor az egész társaság összkora egyrészt  $336 + 32 \cdot n + 6 \cdot 2n$ . (1 pont)  
 Másrészt pedig  $12 \cdot (40 + 3n)$ . (1 pont)  
 Így a  $336 + 32 \cdot n + 6 \cdot 2n = 12 \cdot (40 + 3n)$  egyenletet megoldva kapjuk, hogy  $n = 18$ . (2 pont)  
 Tehát a második csoportban összesen  $3 \cdot 18 = 54$ -en vannak. (1 pont)

**4. feladat:** Az ábrán látható téglalapot felosztottuk öt darab négyzetre. Mekkora a vonalkázott négyzet területe, ha a téglalap kerülete 39 cm?



(6 pont)

**4. feladat megoldás:** Jelölje  $x$  (cm) a legkisebb négyzet oldalát! Ekkor a sátrózott négyzet oldala  $2x$ , az ábrán alattuk lévő négyzet oldala  $3x$ , a jobb oldali négyzet oldala  $5x$ . (2 pont)  
 A téglalap kerülete  $(x \cdot (1 + 2 + 5) + x \cdot (1 + 1 + 3)) \cdot 2$ , (1 pont)  
 innen  $26x = 39 \Leftrightarrow x = 1,5$  (cm). (1 pont)  
 A sátrózott négyzet területe  $(2x)^2 = 9 \text{ cm}^2$ . (2 pont)

**5. feladat:** Dobunk egy piros, egy fehér és egy zöld dobókockával. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a három dobott szám szorzata nem osztható 6-tal?

**5. feladat megoldás:** A dobott számok között nem szerepelhet a 6-os (ezekkel nem foglalkozunk), valamint nem lehet egyszerre a 3-as és páros dobott szám. (1 pont)

**Első megoldás:** Esetszétválasztást végzünk pl. a 3-as dobások száma alapján. Ha 0 darab 3-as van: a kedvező esetek száma  $4^3$ . (Az 1, 2, 4, 5 dobások megfelelnek.)

Ha 1 darab 3-as van: a kedvező esetek száma  $2^2 \cdot 3$ . (A 3-as dobás 3-féle kockával lehetséges.)

Ha 2 darab 3-as van: a kedvező esetek száma  $2 \cdot 3$ . (A nem-3-as dobás 3-féle kockával lehetséges.)

Ha 3 darab 3-as van: a kedvező esetek száma 1.

Összesen  $4^3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 = 83$ .

**Második megoldás (komplementer módszer):** Az 1, 2, 3, 4, 5 dobások lehetséges variációiból kivonjuk a rossz eseteket, azaz amikor 3-as és páros dobás is van. (1 pont)

Az összes eset  $5^3 = 125$ . Jelentse  $s$  a páros (2,4),  $n$  a páratlan (1, 5) dobásokat. Ekkor a lehetséges esetek:

3, 3,  $s$ : ilyenből van  $2 \cdot 3 = 6$  eset;

3,  $s$ ,  $s$ :  $2^2 \cdot 3 = 12$  eset;

3,  $s$ ,  $n$ :  $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$  eset.

Eredmény:  $5^3 - (6 + 12 + 24) = 83$ .

**Harmadik megoldás (szita-formula):** A 3-ast nem tartalmazó dobások száma  $4^3$ , a páros számokat nem tartalmazó dobások száma  $3^3$ .

A  $4^3 + 3^3$  összegből le kell vonnunk azokat a dobásokat, amelyek sem 3-ast, sem páros számot nem tartalmaznak (mert kétszer számoltuk őket).

Ezek száma  $2^3$ , így az eredmény:  $4^3 + 3^3 - 2^3 = 83$ .