

# Kardos Gyula-Montágh Balázs verseny 2016

1. Egy  $n$  tagú társaságot vizsgálunk, ahol az emberek páronként vagy ismerik egymást, vagy nem. Az ismeretség minden esetben kölcsönös. Melyik az a legkisebb  $n$  szám, amelyre biztosan igaz, hogy egy  $n$  tagú társaság tagjai között:

- (i) vagy lesz valaki, aki két embert nem ismer, vagy lesz három, akik egymást mind ismerik;
- (ii) vagy lesz valaki, aki négy embert nem ismer, vagy lesz valaki, aki négy embert ismer;
- (iii) vagy leültethető közülük négy egy kerek asztal köré úgy, hogy mind a négyen ismerik a két szomszédjukat, vagy leültethető a kerek asztal köré közülük négy úgy, hogy közülük senki sem ismeri a két szomszédját.

*Megjegyzés: Ha az (iiii) kérdésre például a válaszod a 37, akkor meg kell mutatnod, hogy 37 ember esetén az adott feltételek biztosan teljesülnek, akárhogy is vannak az ismeretségek; viszont 36 ember között lehetnek úgy az ismeretségek, hogy az (iiii) egyik feltétele sem teljesül.*

(10) i és ii; (11) i és iii; (12) ii és iii.

2. (10) Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy a kiválasztott számok közül bármely kettő összege irracionális!

(11) Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy a kiválasztott számok közül bármely kettő összege irracionális! Igaz-e az állítás, ha öt irracionális számot vizsgálunk?

(12) Melyik a legkisebb  $k$  pozitív egész szám, amelyre  $k$  darab irracionális szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely kettő összege irracionális?

3. Az  $ABCD$  konvex négyszög nem trapéz. Az  $AB$  és  $CD$  oldalegyenesek metszéspontja  $E$ , a  $BC$  és  $DA$  oldalegyenesek metszéspontja  $F$  úgy, hogy  $B$  az  $AE$ ,  $D$  pedig az  $AF$  szakasz belső pontja. Igazoljuk, hogy  $ABCD$  akkor és csak akkor érintőnéyszög, ha  $EA - AF = EC - CF$ .

4. (10) Igazoljuk, hogy ha az  $ABCD$  négyszög érintőnéyszög, akkor az  $ABC$  és  $ADC$  háromszögekbe írt körök érintik egymást!

(11) Az  $ABCD$  húrnégyszög átlóinak metszéspontját jelölje  $E$ . Az  $E$  pontot a húrnégyszög oldalegyenesekre tükrözve kapjuk a  $K, L, M, N$  pontokat. Bizonyítsuk be, hogy  $KLMN$  érintőnéyszög.

(12) Egy négyszögbe négy kört írtunk oly módon, hogy mindegyik pontosan két másik kört érint kívülről, s mindegyik érinti a négyszög két szomszédos oldalát is. Mutassuk meg, hogy ha a négyszög érintőnéyszög, akkor valamely két szemközti kör sugara megegyezik!

5. Urquhart tétel: Az  $ABCD$  konvex négyszög nem trapéz. Az  $AB$  és  $CD$  oldalegyenesek metszéspontja  $E$ , a  $BC$  és  $DA$  oldalegyenesek metszéspontja  $F$  úgy, hogy  $B$  az  $AE$ ,  $D$  pedig az  $AF$  szakasz belső pontja. Mutassuk meg, hogy ha az  $ABC$  és az  $ADC$  háromszög kerülete ugyanakkora, akkor az  $AEC$  és  $AFC$  háromszögek kerülete is ugyanakkora.

Rendelkezésre álló idő 150 perc.

2016. április 21.

Jó munkát!