

Markó Zoltán

Gráfelmélet

Jegyzet (kézirat)

2025. március 27.

М

Tartalomjegyzék

1. Gráfelmélet	3
1.1. A gráfelméletben használatos fogalmak	4
1.1.1. Hurok, többszörös él, fokszám	4
1.1.2. Út, vonal, séta, kör	7
1.2. Gráfok bejárása	12
1.2.1. Euler-vonal	12
1.2.2. Hamilton-kör, Hamilton-út	13
1.3. Fák és erdők	17
1.3.1. Prüfer-kód, Cayley-tétel	18
1.4. Párosítások, páros gráfok	20
1.4.1. Teljes párosítás páros gráfban	21
1.5. A síkbarajzolhatóságról	23
1.5.1. Az Euler-formula	24
1.5.2. Síkbarajzolható gráfok színezése	25
1.6. Ramsey-típusú tételek	28
1.6.1. Ramsey-számok	31

1.

Gráfelmélet

A gráfelmélet napjaink egyik legdinamikusabban fejlődő matematikai tudományága, gráfokkal foglalkozik. A gráf naiv definíciója¹ a következő:

1.1. Definíció (gráf, él, csúcs). Gráfnak nevezzük a pontokból és ezek közül néhányat összekötő vonalakból álló alakzatot. A vonalak a gráf élei, a pontok a gráf csúcsai vagy pontjai.

A gráfok segítségével történő ábrázolás egyszerűbbé teszi egyes feladatok megoldását. A matematikailag is korrekt definíció:

1.2. Definíció (gráf, él, csúcs). Legyen adott egy V halmaz és $E \subset V \times V$ rendszer (vagyis olyan x, y párok összessége, hogy $x, y \in V$, és ilyen párok többször is szerepelhetnek). Ekkor a $G = (V, E)$ párt gráfnak nevezzük, V elemei a gráf csúcsai (pontjai), E elemei a gráf élei.

Ez megfelel az 1.1. definíció naiv fogalmának, hiszen adott V csúcshalmaz esetén a gráfot egyértelműen meghatározza, ha megmondjuk, mely pontok vannak éllel összekötve. Egy él éppen egy $\{x, y\}$ pontpár határoz meg, vagyis $E \subset V \times V$, az élek rendszere².

A gráfot a magyar ábécé nagybetűivel, a G gráf pontjainak halmazát $V(G)$ -vel, az éleinek rendszerét $E(G)$ -vel jelöljük. Gráfok láthatók pl. az 1.1. ábrán.

1.3. Definíció (részgráf, feszített részgráf). Adott G gráf esetén annak részgráfjának nevezzük a G -ből véges sok csúcs és él elhagyásával keletkező gráfot. A részgráf feszített részgráf, ha G -ből csak éleket töröltünk.

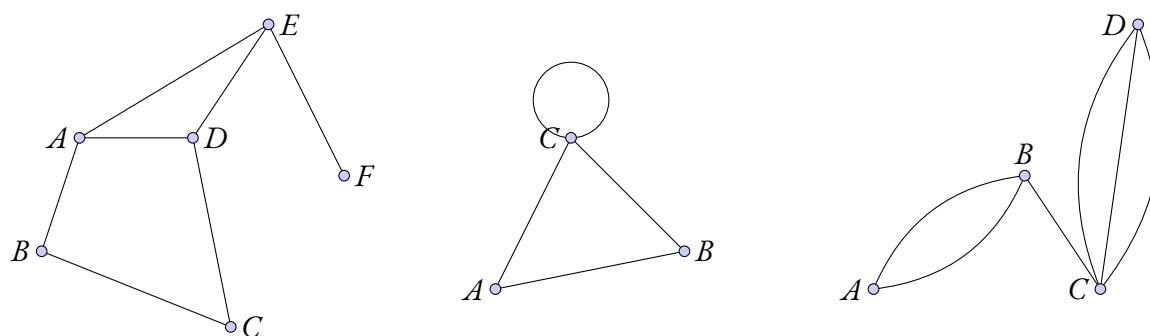
A gráfok tulajdonságainak vizsgálatakor eltekintünk a pontjaik geometriai elhelyezkedésétől, a pontokat összekötő élek formájától, csupán a pontokra és az összekötés tényére vagyunk figyelemmel. Az 1.2. ábra rajzai pl. ugyanazt a két gráfot ábrázolják.

Ezt mondja ki precízen a következő definíció.

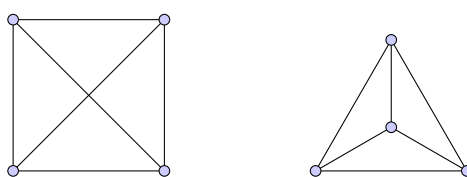
1.4. Definíció (izomorfia). Egy F gráf izomorf egy G gráffal, ha létezik olyan $f : V(F) \rightarrow V(G)$ bijektív leképezés, amire $\{x, y\} \in E(F) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G)$.

Példa

1.5. Példa. Mutassuk meg, hogy az 1.3. ábrán látható gráfok izomorfak!



1.1. ábra. Gráfok



1.2. ábra. Izomorf gráfok

Megoldás: Az első rajzon nevezzük el a csúcsokat. Ekkor a bijekciót az x jelű csúcs esetén az $x \rightarrow x'$ hozzárendelés adja (1.4. ábra). Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ekkor az 1.4. definíció teljesül a két gráfra. A példában szereplő gráfot egyébként Petersen³-gráfnak hívják.

1.1. A gráfelméletben használatos fogalmak

1.1.1. Hurok, többszörös él, fokszám

1.6. Definíció (hurok). Huroknak nevezzük a gráfban az olyan élt, amelynek kezdő- és végpontja ugyanaz.

Hurok pl. az 1.1. ábra második grádjában a C -ből induló és oda visszaérkező él.

1.7. Definíció (többszörös él). Ha a gráfban két pontot több éllel is összekötünk, többszörös élt kapunk.

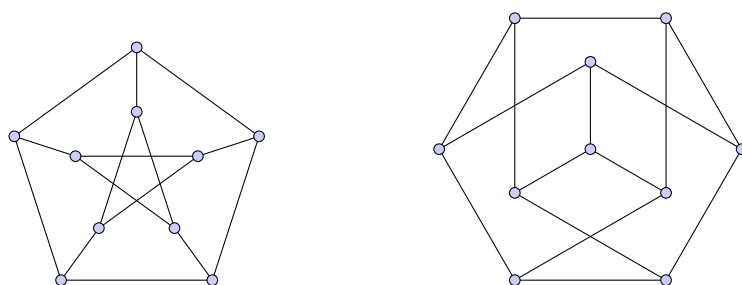
Többszörös él látható pl. az 1.1. ábra harmadik grádjában: A és B közt kétszeres, C és D közt háromszoros él van.

1.8. Definíció (egyszerű gráf). Ha egy gráfban nincs sem hurok, sem összetett él, akkor a gráfot egyszerű gráfnak nevezzük.

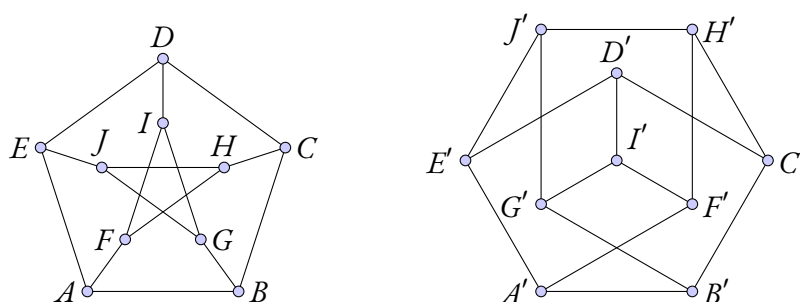
¹A matematikában *naivitás* alatt nem tudományos igényű, megérzésre alapuló fogalomalkotást értünk.

²A $V \times V$ jelölés, illetve a részhalmaz-jel használata nem teljesen korrekt, ha ugyanis E valóban rendszer, akkor bizonyos elemei többször is szerepelhetnek, így nem lehet részhalmaz. Ezen jelölés alatt most tehát azt értjük, hogy E a $V \times V$ „részhalmaza” annyi szabadsággal, hogy bizonyos elemek ismétlődhetnek.

³Julius Peter Christian Petersen (Soro, 1839. június 16. - Koppenhága, 1910. augusztus 5.) dán matematikus, algebrával, számelmélettel, analízissel és gráfelmélettel foglalkozott.



1.3. ábra. A Petersen-gráf két ábrázolása

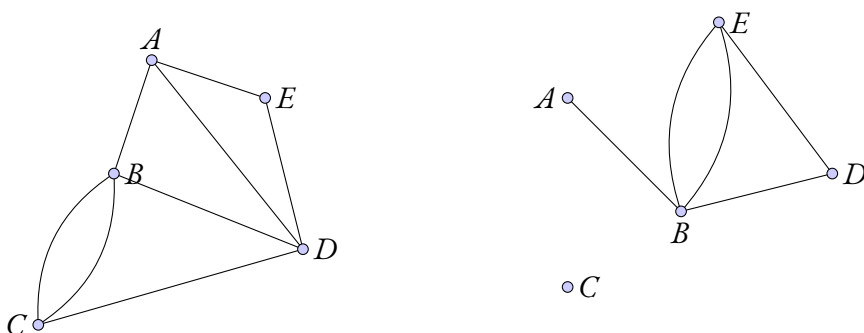


1.4. ábra. Az 1.5. feladathoz

Egyszerű gráf pl. az 1.1. ábra első gráfja.

1.9. Definíció (fokszám, izolált pont). Egy gráf egy pontjának fokszáma a pontban találkozó élek száma. Ha egy pontba nem fut be él, akkor a pontot izolált pontnak nevezzük, az izolált pont fokszáma 0.

Ha A a gráf egy csúcsa, akkor fokszámát $d(A)$ -vel jelöljük⁴.



1.5. ábra. További gráfok

Az 1.5. ábrán látható két gráf közül az első fokszámai rendre 3, 4, 3, 4, 2, a második fokszámai rendre 1, 4, 0, 2, 3.

⁴Az angol *degree* - *fok* szóból.

1.10. Állítás. Bármely gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.

Bizonyítás. A fokszámok összegének számításakor minden él két végpontját számoltuk bele, emiatt az élek számának kétszerese a fokszámok összege. $\square$

Az állításból azonnal következik két további egyszerű állítás.

1.11. Állítás. Bármely gráfban a fokszámok összege páros szám.

Bizonyítás. Az 1.10. állítás szerint a fokszámok összege az élek számának kétszerese. Az élek száma természetes szám, ennek kétszerese páros. $\square$

1.12. Állítás. Bármely gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Bizonyítás. Mivel az 1.11. állítás szerint a fokszámok összege páros, ezért ha a páros fokszámú pontok fokszámösszegét ebből levonjuk, még mindig páros számot kapunk, mely a páratlan fokszámú pontok fokszámösszege. Páratlan sok páratlan szám összege viszont páratlan, így szükségképpen páros soknak kell lenni. $\square$

A továbbiakban olyan gráfokkal foglalkozunk, amelyek csúcshalmaza véges halmaz, ezeket *véges gráfoknak* nevezzük. Véges, egyszerű gráfra további tételek fogalmazhatóak meg a fokszámmal kapcsolatban.

1.13. Tétel. Véges egyszerű gráfban van két pont, amelyek fokszáma egyenlő.

Bizonyítás. Legyen a gráfnak n pontja. Az állítást indirekten bizonyítjuk, vagyis tegyük fel, hogy ebben az n csúcsú gráfban minden pont fokszáma különböző. Ez csak úgy lehetséges, hogy van $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ fokszámú pont (más lehetőségek nincsenek, mivel a gráf egyszerű). Ha az egyik pont fokszáma $n-1$, akkor minden másik pontba vezet belőle él. Ekkor viszont ellentmondáshoz jutottunk, mivel így nem lehet 0 fokszámú pont a gráfban. Így tehát egy véges, egyszerű gráfban biztosan van két olyan pont, amelyek fokszáma egyenlő. $\square$

1.14. Definíció (teljes gráf). Egy egyszerű gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha minden pontjából minden pontjába vezet él. Az egy izolált pontból álló gráfot is teljes gráfnak tekintjük.

Az n csúcsú teljes gráf jelölése: K_n .

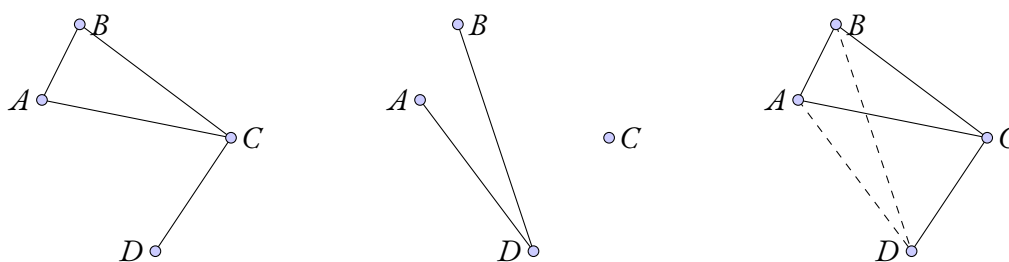
1.15. Tétel. Egy $n \geq 2$ pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{n}{2}$.

Bizonyítás. Kombinatorikai okoskodással: egy teljes gráfban minden pont minden másik ponttal össze van kötve. Így az élek száma annyi, ahányféleképpen ki tudunk választani kettőt az n pont közül úgy, hogy a pontok kiválasztási sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Ezt pedig $\binom{n}{2}$ -féleképpen tehetjük meg.

Geometria okoskodással: egy n csúcsú teljes gráf ábrázolható n oldalú konvex sokszöggént, melynek minden átlója be van húzva. A gráf csúcsai a sokszög csúcsai, a gráf élei a sokszög oldalai és átlói. Az élek számának meghatározásához tehát az átlók számához hozzá kell az oldalak számát. Előbbiből $\frac{n(n-3)}{2}$ db van, oldalból pedig n db. Így a gráf éleinek száma:

$$\frac{n(n-3)}{2} + n = \frac{n(n-3) + 2n}{2} = \frac{n(n-3+2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \binom{n}{2},$$

a binomiális együttható definíciója alapján. $\square$



1.6. ábra. Gráf, annak komplementere, és a két gráf egy ábrán

Bizonyos problémák tárgyalása során hasznos a következő fogalom használata:

1.16. Definíció (gráf komplementere). Egy egyszerű $G = (V, E)$ gráf komplementere a $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' = V$, és $e \in E'$ pontosan akkor teljesül, ha $e \notin E$.

A komplementer gráfot tehát úgy kapjuk, hogy csúcsai az eredeti gráf csúcsaival egyeznek meg, és két pont között pontosan akkor fut él a komplementer gráfban, ha az eredeti gráfban nem futott. Szemléletesen, ha a gráfot és a komplementer gráfot ugyanazon n csúcson rajzoljuk le, csak más-más színű éleket használunk, a gráf és a komplementerének élhalmaza kiadja a teljes gráf élhalmazát⁵ (1.6. ábra). Fontos megjegyezni, hogy komplementere csak egyszerű gráfnak van (ha lehetséges a többszörös, illetve hurokélek értelmezése is, akkor nem lenne világos, milyen érendszerre nézve beszélhetünk komplementerről).

Sokszor van szükségünk arra is, hogy egy gráf éleit irányítsuk, ezért definiáljuk a következő fogalmat.

1.17. Definíció (irányított gráf). Egy gráfot irányított gráfnak nevezünk, ha élei irányított szakaszok. Ekkor éleit irányított éleknek nevezzük.

1.1.2. Út, vonal, séta, kör

A következőkben gráfok bejárásával, illetve ennek különböző feltételű lehetőségeivel foglalkozunk (a problémát szintén gyakorlati feladatok motiválták). Egy gráf bejárása alatt bizonyos csúcsainak egymás utáni sorozatát értjük úgy, hogy a bejárás szomszédos csúcsai között vezet él.

1.18. Definíció (séta). Sétának nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben ugyanazok az élek és pontok többször is előfordulhatnak.

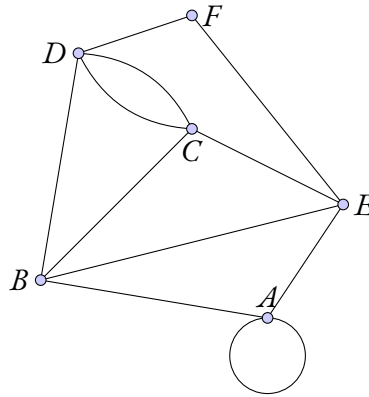
Séta pl. A -ból F -be az 1.7. ábra gráfján az $ABEBCDCE$ bejárás.

1.19. Definíció (vonat). Vonatnak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben minden él csak egyszer fordulhat elő, de egyes pontok többször is előfordulhatnak.

Vonat pl. A -ból F -be az 1.7. ábra gráfján az $AAEBDCDF$ bejárás.

1.20. Definíció (út). Útnak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egyenél többször.

⁵ Mivel egyszerű gráfról van szó, itt E valóban élhalmaz. Az elnevezést az indokolja, hogy E' az E halmaznak az n csúcsú teljes gráf élhalmazára vonatkozó komplementerhalmaza.



1.7. ábra. Egy gráf a séta, vonal, út, kör fogalmához

Út pl. A -ból F -be az 1.7. ábra gráfján az $ABCDF$ bejárás.

A definíciók szerint tehát a séta során tetszőleges számú pontot és élt érinthetünk, a vonal során egy élt legfeljebb csak egyszer, és az út során a pontokat és az éleket is legfeljebb csak egyszer érinthetjük.

1.21. Definíció (kör). Körnek nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, ha a kiindulási pont megegyezik a végponttal, egyébként minden él és minden pont csak egyszer fordulhat elő.

A kör tehát tekinthető egy önmagába záródó útnak. Kör pl. az 1.7. ábra gráfján a $AEFDCBA$ bejárás. Sokszor körnek nevezzük azt a gráfot is, amely önmaga egy kör. A hurokért önmagában nem tekintjük körnek.

1.22. Tétel. Ha egy gráfban két csúcs között van vonal, akkor van út is.

Bizonyítás. Legyen a két pont A és B , a vonal pedig $V = A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$, $A_1 := A$, $A_n := B$. Ha minden csúcs indexe különböző, akkor mivel a vonalban minden él egyszer fordul elő, V egy út. Tegyük fel, hogy van két azonos index, vagyis a vonalban van $\dots A_kA_i \dots A_iA_l \dots$ részvonala - ez éppen azt jelenti, hogy a vonalban van kör. Hagyjuk el ezen kör éleit és pontjait, akkor az előző részvonala $\dots A_kA_iA_l \dots$ részre egyszerűsödik, és az ismétlődő pontpárok száma eggyel csökkent. Ha az összes ilyen ismétlődő pontpárra elhagyjuk a köröket, akkor egy $A_1 \dots A_n$ utat kapunk. $\square$

Az 1.22. tétel bizonyításában látottak szerint az út tehát nem más, mint egy körmentes vonal.

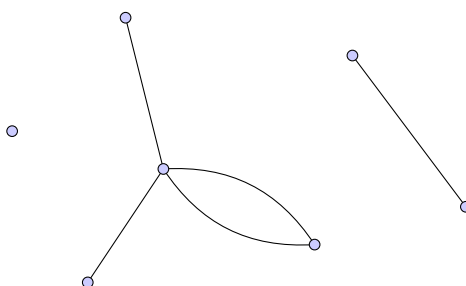
1.23. Tétel. Ha egy gráfban két csúcs között van séta, akkor van vonal is.

Bizonyítás. Legyen a két pont A és B , a séta pedig $S = A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$, $A_1 := A$, $A_n := B$. Ha a sétában nincsenek $\dots A_iA_j \dots A_iA_j \dots$ alakú ismétlődések (többször előforduló élek), akkor S egy vonal. Ha van ilyen élismétlődés, akkor az 1.22. tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan a kétszer előforduló él első előfordulásának kezdőpontját és második előfordulásának végpontját tartsuk meg (a köztes élsorozatot hagyjuk el), így az előző részéta $\dots A_iA_j \dots$ alakúra egyszerűsödik. Egy ilyen lépéssel az ismétlődő élek számát eggyel csökkentettük. Minden ismétlődésre végrehajtva ezen lépést, végül egy $A_1 \dots A_n$ vonalat kapunk. $\square$

Az 1.23. tétel bizonyítása szerint tehát a vonal nem más, mint egy olyan séta, amelyben az élek nem ismétlődhetnek. Sok gyakorlati probléma megoldása során fontos az a kérdés, hogy a gráf egyik csúcsából a másikba el tudunk-e jutni valamely élsorozat mentén. Az 1.22. és az 1.23. tételek szerint teljesen mindegy, hogy ez élsorozat milyen jellegű, ezért azt írjuk elő, hogy legyen út.

1.24. Definíció (összefüggő gráf, komponens). Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely pontjából bármely pontjába úton eljuthatunk. A nem összefüggő gráfok összefüggő részei a komponensek.

Az 1.7. ábra gráfja pl. összefüggő, míg az 1.8. ábra gráfja nem összefüggő, három komponense van.



1.8. ábra. Egy nem összefüggő gráf

1.25. Tétel. Ha egy összefüggő gráfban egy kör tetszőleges élét kihagyjuk, a gráf összefüggő marad.

Bizonyítás. A kör egy élét elhagyva a kör megmaradó éleinek segítségével a két pont között út létesül. Így a gráf összefüggő marad azután is, hogy a kör egyik élét kihagytuk. $\square$

1.26. Tétel. Egy gráfban pontosan akkor van kör, ha van két csúcsa, melyet két különböző út köt össze.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy a gráfban van kör, legyen ez $A_1A_2 \dots A_nA_1$ (tetszőleges csúcsából indulva). Legyen ennek egy pontja A_i ($1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}$). Ekkor az $A_1A_2 \dots A_{i-1}A_i$ és az $A_iA_{i+1} \dots A_nA_1$ két db út, melyek A_1 -et és A_i -t kötik össze, és különböznek.

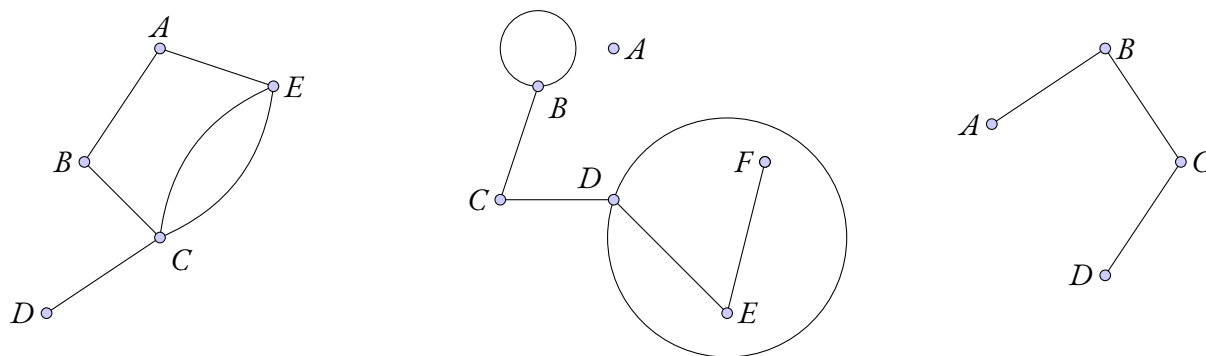
$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy a gráfban van két pont, melyet különböző utak kötnek össze. Ezen utaknak vannak közös élei, és olyan élsorozataik, melyek különböznek. Az ilyeneknek van közös kezdőpontja és végpontja, legyen az egyik ilyen élsorozat-pár közös kezdőpontja A , közös végpontja B , az élsorozatok pedig $AC_1 \dots C_nB$, $AD_1 \dots D_nB$. Ekkor az $AC_1 \dots C_nBD_n \dots D_1A$ egy kör a gráfban. $\square$

1.27. Tétel. Ha egy összefüggő, legalább három csúcsú véges gráfban minden csúcs fokszáma legalább kettő, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás. Kezdjük el a gráfból tetszőleges éleket elhagyni, míg minden csúcs fokszáma pontosan kettő nem lesz - a gráf végessége miatt ez az eljárás véget fog érni. Viszont a legalább három csúcsú, összefüggő gráfok, melyekben minden csúcs fokszáma kettő, éppen a körök. Így a kapott gráf egy kör, és az elhagyott éleket visszavéve, az eredeti gráfban is kör lesz. $\square$

Az 1.27. tétel következménye, hogy ha egy gráfban nincs kör, akkor a gráfnak biztos van elsőfokú pontja.

Példák



1.9. ábra. Az 1.28. feladathoz

1.28. Példa. Az 1.9. ábra gráfjaiban nevezzük meg a hurkokat és a többszörös éleket. Melyik az egyszerű gráf?

Megoldás: Többszörös él az első gráf CE éle (kétszeres él), hurok a második gráf BB és DD éle. A harmadik gráfban sem többszörös él, sem hurok nem található, ez tehát az 1.8. definíció szerint egyszerű gráf.

1.29. Példa. Tudjuk, hogy egy teljes gráfnak összesen 190 éle van. Hány csúcsa van a gráfnak?

Megoldás: Az 1.15. tétel szerint, ha a teljes gráfnak n csúcsa van, akkor

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 190.$$

Megoldandó tehát az $n(n-1) = 380$ egyenlet, amivel ekvivalens:

$$n^2 - n - 380 = 0.$$

Ennek gyökei

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 380}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1521}}{2} = \frac{1 \pm 39}{2},$$

vagyis $n_1 = -19$, $n_2 = 20$. Mivel most $n \geq 1$, ezért a megoldás csak az $n = 20$ lehet. Tehát a kérdéses gráfnak 20 csúcsa van.

1.30. Példa. Legyen G az a 10 csúcsú gráf, melynek csúcsai az $\{1, 2, \dots, 9, 10\}$ számokkal vannak indexelve, és az n és m indexű csúcs akkor van összekötve

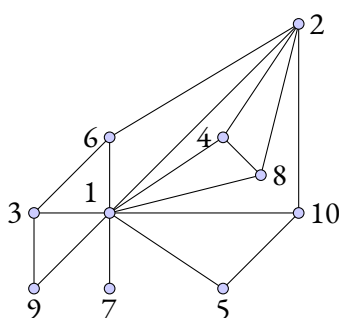
a) irányítatlan

b) irányított

élel, ha $n \mid m$, és $n \neq m$. Van-e út 2-ből 9-be? Milyen hosszú a leghosszabb kör?

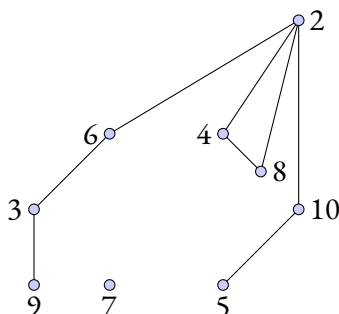
Megoldás: A kérdéses gráf az 1.10. ábrán látható.

a) Az 1 minden számnak osztója, így az 1-ből minden csúcsba megy él. Ezáltal a 2, 1, 9 egy lehetséges út. Mivel az 1 minden csúcsnak szomszédja, az is igaz, hogy bármely két csúcs közt van út.



1.10. ábra. Az 1.30. feladathoz

Nézzük mi a leghosszabb kör a gráfban. Vegyük észre, hogy elegendő a $G' = G \setminus 1$ gráfot vizsgálni (ez alatt azt értjük, hogy elhagyjuk az 1-es csúcsot és a belőle kiinduló éleket). Ha ugyanis G' -ben van egy kör, akkor ennek két tetszőleges szomszédos pontját összekötve az 1-es csúccsal, és a két pontot összekötő élt elhagyva, eggyel hosszabb kört kapunk G -ben. Hasonlóan, ha van G' -ben egy út, akkor ennek két végpontját összekötve 1-gyel, kört kapunk G -ben, melynek az útnál kettővel több éle van. Megkeresendő tehát G' -ben a leghosszabb út/kör. Ha ezt megtaláljuk, akkor a kettő közül kiválasztva a hosszabbat, az előzőekben leírt módon hozzávéve az 1-es csúcsot, megkapjuk a leghosszabb kört G -ben. G' gráf az 1.11. ábrán látható. Az 1.11. ábrán jól látszik, hogy G' -ben a leghosszabb kör 3 élből áll, míg a leghosszabb út



1.11. ábra. A G' gráf

5-ből (három ilyen út van: $(9, 3, 6, 2, 4, 8)$, $(9, 3, 6, 2, 8, 4)$, $(9, 3, 6, 2, 10, 5)$). Ez utóbbi utak valamelyikéhez a fentiek szerint hozzávéve az 1-es csúcsot, kapjuk G -ben a leghosszabb köröket, melyek hét élből állnak (ezen körök: $(1, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1)$, $(1, 9, 3, 6, 2, 8, 4, 1)$, $(1, 9, 3, 6, 2, 10, 5, 1)$).

- b) Ha a gráf élei irányítva vannak, akkor egy lehetséges út csak az irányítás mentén haladhat. A 2-ből induló utak így csak a 2 többszörösein haladhatnak, ezért 9-be nem érhetnek el, vagyis nincs irányított út 2-ből 9-be. Ugyanígy, irányított kör sincs a gráfban, hiszen ez is egy n szám többszörösein haladna, de mivel körről van szó, lenne olyan m szám, hogy $n|m$ és $m|n$, amiből következik, hogy $n = m$, így a „kör” végül egyetlen pontból állna, ami nem lehetséges.

1.2. Gráfok bejárása

1.2.1. Euler-vonal

1.31. Definíció (nyílt, zárt Euler-vonal). Euler-vonalnak nevezünk egy vonalat a gráfban akkor, ha a gráf minden élén áthalad. Az Euler-vonal lehet nyitott, ha kezdőpontja nem egyezik meg a végpontjával, és lehet zárt, ha kezdőpontja megegyezik a végpontjával.

Sok helyen a zárt Euler-vonalra az *Euler-kör*, míg a nyílt Euler-vonalra az *Euler-út* elnevezést is használják. Mi ezt következetesen nem tesszük, hiszen a zárt Euler-vonal nem kör, a nyílt Euler-vonal pedig nem út, az 1.21. és az 1.20. definíciók szerint.

Az Euler-vonal definiálása Euler⁶ nevéhez köthető, aki elsőként fogalmazott meg tételleket az akkoriban népszerű következő kérdés kapcsán. A probléma története, hogy a poroszországi Königsberg (most Kalinyingrád, Oroszország) városban hét híd ívelt át a várost átszelő Prégel folyón úgy, hogy ezek a folyó két szigetét is érintették. A königsbergiek azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, vajon végig lehet-e menni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjanak át, és egyúttal visszaérjenek a kiindulópontba. Euler az 1.39. példában látottakhoz hasonlóan igazolta, hogy ez nem lehetséges, és bizonyította a következő tételt:

1.32. Tétel (Euler-tétel). Izolált pontot nem tartalmazó gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha a gráf összefüggő és minden pont fokszáma páros.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó gráfban van zárt Euler-vonal. Ekkor a gráf egyrészt összefüggő, mert az Euler-vonal minden élet tartalmaz, így minden ponton legalább egyszer átmegy. Vagyis bármely két pont közt van vonal, akkor az 1.22. tétel szerint bármely két csúcs közt van út is, és az 1.24. definíció értelmében a gráf összefüggő. Ha az Euler-vonal egy élen bemegy egy csúcsba, akkor onnan egy másik élen ki is kell jönnie, ezért az Euler-vonal közbenső pontjainak fokszáma páros. Emellett, mivel a kezdőpont megegyezik a végponttal, ezért onnan egy élen elindulva, majd másikon visszaérkezve (és közben esetleg valahányszor átmenve rajta) a kezdőpont fokszáma is páros lesz.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő, és minden fokszáma páros. Ekkor az összefüggőség miatt nincs benne izolált pont. Tekintsünk egy leghosszabb vonalat G -ben, ami egyetlen élet sem használ egynél többször. Mivel minden fokszám páros, ezért ennek kezdőpontja szükségképpen egybeesik a végpontjával. Tegyük fel ugyanis, hogy ez nem igaz: ekkor a kezdő/végpontból még indul a vonal által bejáratlan él, ami mentén a vonal hosszabbá tehető - ez viszont ellentmondás, hiszen feltettük, hogy a vonal a lehető leghosszabb.

A leghosszabb vonal kezdő- és végpontja tehát megegyezik. Ha minden élet tartalmaz, akkor ez egy zárt Euler-vonal, és készen vagyunk. Ha nem, akkor létezik bejáratlan él, és az összefüggőség miatt létezik már érintett csúcsból induló bejáratlan él. A meglévő zárt vonalat végigjárhatjuk ebből a pontból, ekkor ide is érkezünk vissza, és folytathatjuk a bejáratlan élen. Akkor viszont ez ismét hosszabb vonal, mint a leghosszabb vonal, ami ellentmondás. A leghosszabb vonal tehát önmagába záródik, és minden élet pontosan egyszer tartalmaz, így zárt Euler-vonal. $\square$

Ezek után egyszerű szükséges és elégséges feltételt adni arra, hogy mikor van a gráfban nyílt Euler-vonal.

1.33. Tétel (Euler-tétel). Izolált pontot nem tartalmazó gráfban akkor és csak akkor van nyílt Euler-vonal, ha a gráf összefüggő és pontosan két csúcsa páratlan fokú, a többi fokszáma páros.

⁶Leonhard Euler (Bázel, 1707. április 15. - Szentpétervár, 1783. szeptember 18.) svájci matematikus és fizikus, az egyik legtermékenyebb és legjelentősebb tudós. Maradandót alkotott a számelméletben, a geometriában, nevéhez fűződik a háromszögek Euler-egyeneseinek és Feuerbach-körének felfedezése, az Euler-féle poliédertétel, rengeteg analitikus állítás bizonyítása. A gráfelmélet nyitányának tekinthető a königsbergi hidak problémája, mely az Euler-vonal fogalmához vezetett.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó gráfban van nyílt Euler-vonal. Az 1.32. tétel bizonyításában láttuk szerint a gráf összefüggő. Az Euler-vonal közbenső pontjainak foka ugyancsak az előbbieket szerint páros. Ugyanakkor a kezdő- és végpont foka páratlan, hiszen előbbiből indul az Euler-vonal (és utána esetleg néhányszor átmegy rajta, a fokszámot páros számmal növelve), utóbbiba érkezik az Euler-vonal (és ugyancsak kimehet még belőle páros sok él, az Euler-vonalon történő bejárás során). Tehát két pont foka páratlan, a többi pedig páros.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy az összefüggő G gráfban pontosan két csúcs fokszáma páratlan, a többi páros. Az összefüggőség miatt nincs benne izolált pont. Kössük össze a két páratlan fokszámú csúcsot, az így nyert G' gráfban minden pont foka páros, így az 1.32. tétel szerint van benne zárt Euler-vonal. Elhagyva a behúzott élet, egy nyílt Euler-vonalat kapunk G -ben, melynek kezdő- illetve végpontjai a páratlan fokszámú pontok. $\square$

Az 1.33. tétel bizonyításából tehát következik, hogy a nyílt Euler-vonal az egyik páratlan fokszámú csúcsból indul, és a másik páratlan fokszámú csúcsba érkezik.

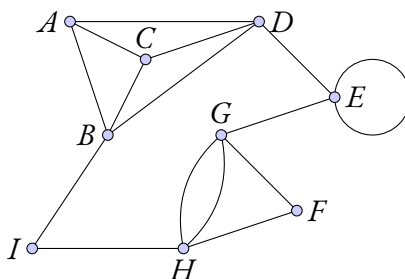
1.2.2. Hamilton-kör, Hamilton-út

Az Euler-vonal egy olyan vonal, mely minden élet pontosan egyszer tartalmaz. Ennek pontokra vonatkozó megfelelője az olyan út, mely minden pontot csak egyszer tartalmaz.

1.34. Definíció (Hamilton-út, Hamilton-kör). Az olyan utat, amely a gráf minden csúcsán áthalad, Hamilton-útnak nevezzük. Az olyan utat, amely a gráf minden csúcsán áthalad, és végül a kiindulópontjába tér vissza, Hamilton-körnek nevezzük.

Az út definíciójából adódik, hogy a Hamilton⁷-út minden ponton csak egyszer halad át. A Hamilton-körre szintén ez teljesül annyi szabadsággal, hogy az első és utolsó pont megegyezik (ezáltal ezt kétszer látogatja meg).

Az 1.12. ábra grájában pl. van Hamilton-kör: $ABIHFGEDCA$.



1.12. ábra. Egy gráf, melyben van Hamilton-kör

Szükséges és elégséges feltételt találni Hamilton-kör létezésére meglehetősen nehéz⁸, és napjainkig nem is találtak hatékonyan ellenőrizhető feltételt. Nyilván szükséges, hogy a gráf legyen összefüggő, és legyen benne kör, erre elégséges feltételt ad (legalább 3 csúcs esetén) pl. az 1.27. tétel. Semmi sem garantálja viszont, hogy ez a kör minden csúcsot tartalmaz.

⁷Sir William Rowan Hamilton (Dublin, 1805. augusztus 4. - Dublin, 1865. szeptember 2.) ír matematikus, fizikus, csillagász. Főként fizikával, algebrával foglalkozott, a róla elnevezett Hamilton-kör egy általa kitalált matematikai játék kapcsán merült fel.

⁸Sőt, ez a „nehézség” matematikailag is precízen kifejezhető.

További szükséges feltételt ad meg a következő tétel:

1.35. Tétel. Ha G gráfban van Hamilton-kör, akkor bármely $1 \leq k \leq n$ db csúcsát elhagyva legfeljebb k komponensre esik szét.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G n -csúcsú gráfban van Hamilton-kör. Ekkor csúcsai ezen kör mentén helyezkednek el, legyen a címkézésük pl. $A_1 A_2 \dots A_n A_1$. Teljes indukciót használunk a kivett csúcsok száma szerint. Ha $k = 1$, akkor egy tetszőleges A_i ($1 \leq i \leq n$) csúcsot veszünk ki, és a körből az $A_{i+1} A_{i+2} \dots A_n A_1 A_2 \dots A_{i-2} A_{i-1}$ utat kapjuk (ez az 1.34. definíció értelmében egy Hamilton-út). Bármely pontból bármely másik úton elérhető, az 1.24. definíció szerint a gráf összefüggő maradt, a komponensek száma 1.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz k -ig, igazoljuk $k+1$ -re: a $k+1$ pontot úgy hagyjuk el, hogy a gráfból először elhagyunk k db csúcsot, majd egyet. Előbbi esetben az indukciós feltétel szerint legfeljebb k komponensre esett szét. A további plusz egy csúcs elhagyása valamelyik komponensben történik, és mivel a pontok ott is útra fűzhetőek, ezért ez a komponens legfeljebb két részre esik szét, ami a komponensek számának eggyel való növekvését eredményezi. $k+1$ csúcs elhagyásával tehát a gráf legfeljebb $k+1$ komponensre esik szét, az állítás igaz. $\square$

Az 1.35. tétel szerint ha G gráf olyan, hogy valamely $1 \leq k$ db csúcsát elhagyva legalább $k+1$ komponensre esik szét, akkor G -ben nincs Hamilton-kör.

Dirac és Ore tételei

Nézzünk most Hamilton-kör létezésére vonatkozó elégséges feltételeket, melyek Dirac⁹, illetve Ore¹⁰ nevéhez kapcsolódnak.

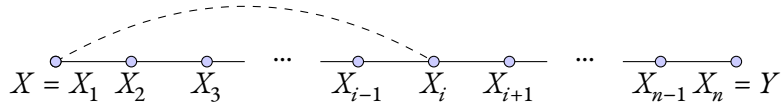
1.36. Tétel (Dirac-tétel). Ha egy n csúcsú egyszerű, összefüggő gráfban minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy G gráfban a feltételek teljesülnek, de nincs benne Hamilton-kör. Telítjük a gráfot élekkel a következőképpen: addig húzunk be új éleket (az egyszerűség megtartásával), amíg abba helyzetbe nem kerülünk, hogy bármely még hiányzó él behúzásával már lenne a gráfban Hamilton-kör. Így kapjuk a G' gráfot, melyben tehát vannak összekötetlen csúcsok. Ha bármely két ilyen csúcsot összekötnénk, akkor a gráfban már lenne Hamilton-kör, így bármely két összekötetlen csúcs közt van Hamilton-út. Legyen egy ilyen összekötetlen csúcspár X és Y , a csúcsok a Hamilton-út mentén $X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n$, $X_1 := X$, $X_n := Y$ (1.13. ábra). Vegyük észre, hogy ha $\{X, X_i\}$ éle a gráfnak, akkor $\{X_{i-1}, Y\}$ nem éle, ellenkező esetben ugyanis $X X_2 \dots X_{i-1} Y Y_{n-1} X_{n-2} \dots X_i X$ Hamilton-kör lenne. Másrészt, az új élek behúzása a fokszámokat nem csökkentette, így X -nek továbbra is legalább $\frac{n}{2}$ szomszédja van. Ez az előzőek szerint azt jelenti, hogy legalább $\frac{n}{2}$ csúcs nincs összekötve Y -nal. Mivel a gráf egyszerű, ezért hurokélek nincsenek, vagyis Y önmagával sem lehet összekötve, ezért fokszáma legfeljebb $n - 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1$, ami ellentmond annak, hogy a fokszáma legalább $\frac{n}{2}$. Ellentmondáshoz jutottunk, így az eredeti gráfban kell Hamilton-körnek lennie, a tétel igaz. $\square$

Általánosabb feltételekkel is megadható elégséges feltétel, figyeljük meg a bizonyítás hasonlóságát az 1.36. Dirac-tételével.

⁹Gabriel Andrew Dirac (Budapest, 1925. március 13. - Arlesheim, 1984. július 20.) magyar származású matematikus, maradandót a gráfelmélet terén alkotott. Mostohafia a fizikus Paul Diracnak, illetve unokaöccse Wigner Jenőnek.

¹⁰Oystein Ore (Oslo, 1899. október 7. - Oslo, 1968. augusztus 13.) norvég matematikus. Algebrával és gráfelmélettel foglalkozott.



1.13. ábra. Az 1.36. Dirac- és az 1.37. Ore-tétel bizonyításához

1.37. Tétel (Ore-tétel). Ha egy n csúcsú egyszerű, összefüggő gráfban bármely két összekötetlen X, Y csúcs fokszámára $d(X) + d(Y) \geq n$ teljesül, akkor a gráfban van Hamilton-kör.

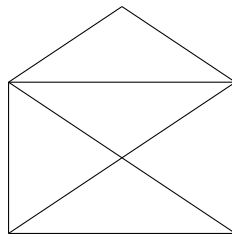
Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy G gráfban a feltételek teljesülnek, de nincs benne Hamilton-kör. Telítjük a gráfot élekkel a következőképpen: addig húzunk be új éleket (az egyszerűség megtartásával), amíg abba helyzetbe nem kerülünk, hogy bármely még hiányzó él behúzásával már lenne a gráfban Hamilton-kör. Így kapjuk a G' gráfot, melyben tehát vannak összekötetlen csúcsok. Ha bármely két ilyen csúcsot összekötünk, akkor a gráfban már lenne Hamilton-kör, így bármely két összekötetlen csúcs közt van Hamilton-út. Legyen egy ilyen összekötetlen csúcspár X és Y , a csúcsok a Hamilton-út mentén $X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n$, $X_1 := X$, $X_n := Y$ (1.13. ábra). Vegyük észre, hogy ha $\{X, X_i\}$ éle a gráfnak, akkor $\{X_{i-1}, Y\}$ nem éle, ellenkező esetben ugyanis $XX_2 \dots X_{i-1} Y Y_{n-1} X_{n-2} \dots X_i X$ Hamilton-kör lenne. Másrészt, az új élek behúzása a fokszámokat nem csökkentette, így X -nek legalább $d(X)$ szomszédja van. Ez az előzőek szerint azt jelenti, hogy legalább $d(X)$ csúcs nincs összekötve Y -nal. Mivel a gráf egyszerű, ezért hurokélek nincsenek, vagyis Y önmagával sem lehet összekötve, ezért fokszáma legfeljebb:

$$\begin{aligned} d(Y) &\leq n - 1 - d(X) \\ d(X) + d(Y) &\leq n - 1, \end{aligned}$$

ami ellentmond annak, hogy $d(X) + d(Y) \geq n$. Ellentmondáshoz jutottunk, így az eredeti gráfban kell Hamilton-körnek lennie, a tétel igaz. $\square$

Példák

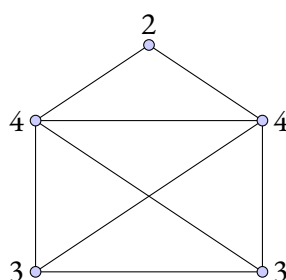
1.38. Példa. Meg tudjuk-e rajzolni az 1.14. ábrán látható borítékot úgy, hogy közben nem emeljük fel a ceruzánkat, és minden vonalon csak egyszer menjünk végig?



1.14. ábra. Egy boríték

Megoldás: Tekintsük a boríték ábráját egy ötponτού gráfnak, és írjuk a csúcsok mellé a fokszámokat az 1.15. ábrán látható módon.

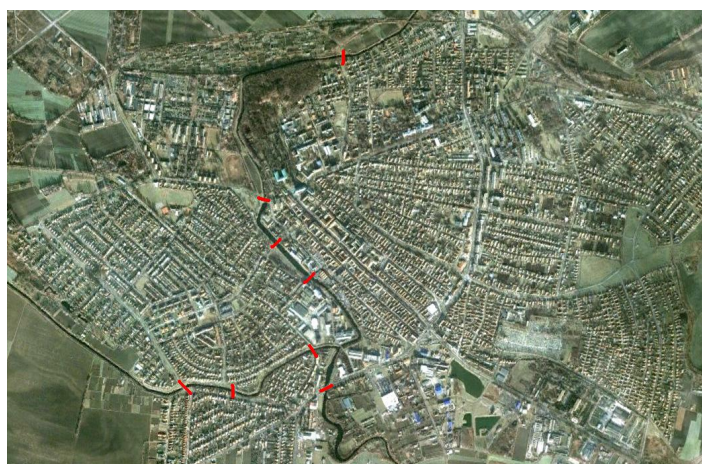
Ceruzánk felemelése nélkül a gráfot akkor tudjuk megrajzolni (minden él egyszeri megrajzolásával), ha a gráfban van Euler-vonal. A fokszámok: 3, 4, 2, 4, 3, így az 1.33. tétel szerint van nyílt Euler-vonal, így a boríték a kívánt módon megrajzolható.



1.15. ábra. Az 1.38. feladathoz

1.39. Példa. Kalocsa városán a Vajas csatorna folyik keresztül, a különböző városrészeket 8, forgalomban lévő híd köti össze (1.16. ábrán kiemelve). Lehetséges-e végigmenni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjunk át, és

- a) visszaérjünk a kiindulópontba; b) nem kell visszaérnünk a kiindulópontba?

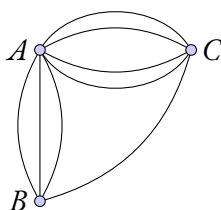


1.16. ábra. Kalocsa és hídjai

Megoldás: A hidak elhelyezkedése a probléma szempontjából lényegtelen, legyen a Vajas által elválasztott városrészek mindegyike egy K gráf egy-egy pontja, a hidak pedig a pontokat összekötő élek. Akkor az 1.16. ábra térképe szerint az 1.17. ábrán látható gráfot kapjuk. Feladatunk egy olyan bejárás megtalálása, mely minden élet (hidat) pontosan egyszer érint: ez egy Euler-vonal keresés. Az 1.32. tétel és az 1.33. tétel alkalmazásához írjuk fel a gráf csúcsainak fokszámait, ezek rendre 7, 4, 5. Az 1.32. tétel szerint zárt Euler-vonal nem létezik, vagyis az a) kérdésre a válasz nemleges. Viszont az 1.33. tétel szerint nyílt Euler-vonal van, ha az A városrészből indulunk, és a C -be érkezünk, vagy fordítva. A b) kérdésnek megfelelő bejárás tehát létezik.

1.40. Példa. Bizonyítsuk be az 1.36. Dirac-tételt az 1.37. Ore-tétel segítségével!

Megoldás: Tegyük fel, hogy egy n csúcsú összefüggő gráfban minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor bármely két összekötetlen X, Y csúcsra is $d(X) + d(Y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, vagyis teljesül az 1.37. Ore-tétel feltétele, a gráfban van Hamilton-kör.



1.17. ábra. A K gráf

1.41. Példa. Egy hotelba egy 100 fős társaság érkezett, akik közül kezdetben bármely két ember jóban volt egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ült le mindenki, de egy-egy vacsora alkalmával az egymás mellé került emberek örökre összevesztek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki jóban legyen a szomszédaival. Ha ez nem lehetséges, akkor az összes résztvevő még aznap este hazamegy, előbb azonban nem. Mutassuk meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelban tölt a társaság!

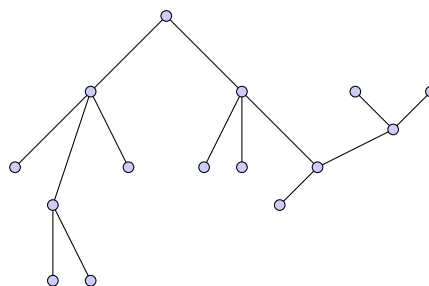
Megoldás: Az i . napi vacsora előtti állapotot ábrázoljuk egy 100 csúcsú G_i gráffal, ahol a csúcsok a társaság tagjai, és két csúcs akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő emberek jóban vannak. A társaság akkor marad még egy éjszakára, ha a gráfban van Hamilton-kör. Az i . vacsora alkalmával a G_{i-1} gráfból egy Hamilton-köre éleinek törlésével kapjuk G_i -t, melynek során minden csúcs foka 2-vel csökken (mindenki a szomszédaival veszik össze). Kezdetben minden csúcs foka 99 volt (G_1 a 100 csúcsú teljes gráf), így az i . vacsora előtt minden csúcs foka $99 - 2(i - 1)$.

Ha $i \leq 25$, akkor $99 - 2(i - 1) \geq 99 - 2(25 - 1) = 51 > 50$, vagyis G_i minden csúcsának foka nagyobb a gráf csúcsszámának felénél. Ezért az 1.36. Dirac-tétel szerint ha $i \leq 25$, a gráfban van Hamilton-kör, így legalább 25-ször tudnak együtt vacsorázni, tehát ennyi éjszakát legalább a hotelban töltenek.

1.3. Fák és erdők

1.42. Definíció (fa, erdő). Az olyan egyszerű, összefüggő gráfot, melyben nincs kör, fának nevezzük. Ha egy gráf komponensei fák, akkor a gráfot erdőnek hívjuk.

Fa látható pl. az 1.18. ábrán. A fa elnevezés a gráf alakjából adódik¹¹.



1.18. ábra. Egy fa

Nézzük meg a fák néhány egyszerű tulajdonságát.

¹¹ Az *erdő* elnevezés ugyancsak a matematikusok humorérzékét dicséri.

1.43. Állítás. Egy $2 \leq n$ csúcs fának mindig van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítás. Tekintsünk a G fában egy leghosszabb utat, ennek végpontjai legyenek X és Y . Ekkor X elsőfokú, mert ha X -ből még egy él indulna, akkor két esetet különböztetünk meg:

- ha az új él másik végpontja nincs az úton, akkor ezen éllel meghosszabbítva hosszabb utat kapnánk, mint a leghosszabb út, ami nem lehetséges,
- ha az új él másik végpontja az úton van, akkor a gráfban lenne kör, ami G fa volta miatt ellentmondás.

Ugyanígy meggondolható, hogy Y foka is egy, vagyis van legalább két csúcs a gráfban, amely elsőfokú. $\square$

1.44. Állítás. Ha egy gráf fa, akkor bármely összekötetlen csúcsa közt élet behúzva, már lesz benne kör.

Bizonyítás. Mivel a gráf fa, ezért az 1.42. definíció szerint összefüggő, ezért bármely két összekötetlen csúcs közt van út. Ez az út a csúcsok közti él behúzásával egy körre zárul. $\square$

1.45. Állítás. Ha egy gráf fa, akkor bármely élet elhagyva már nem lesz összefüggő.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy egy fában az X és Y csúcsok közt van él, és ezen él elhagyásával a gráf továbbra is összefüggő marad. Akkor az 1.24. definíció szerint X és Y közt is van út, ami a kitörölt él behúzásával körre zárulna. Ez viszont ellentmondás, mert a gráf fa volta miatt nem lehetett benne kör. A kezdeti feltevés tehát helytelen volt, az állítás igaz. $\square$

Az 1.44. és az 1.45. állítások szerint a fagráf a minimális összefüggő, maximális körmentes gráf.

1.46. Állítás. Egy n csúcsú fa éleinek száma $n - 1$.

Bizonyítás. Hagyjuk el egyesével az n csúcsú fa éleit. Ekkor az 1.45. állítás szerint a komponensek száma mindig eggyel növekszik. Az összes él elhagyása után n komponensünk van (n db izolált pont), kezdetben pedig 1 volt. Ez éppen azt jelenti, hogy a komponensek száma $n - 1$ -gyel nőtt, azaz a gráfnak ennyi élet hagytuk el. $\square$

1.3.1. Prüfer-kód, Cayley-tétel

A fejezet alapvető kérdése, hogy hány különböző fa adható meg n címkézett ponton. A válaszhoz minden egyes fához hozzárendelünk egy, a címkékből álló kódot, amelyet a fa Prüfer¹²-kódjának nevezünk.

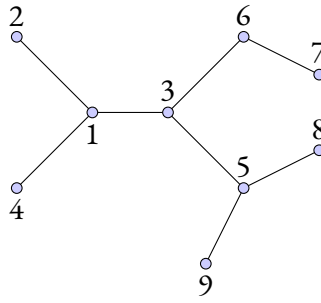
Legyenek a pontok címkéi a természetes számok 1-től n -ig. A Prüfer-kód felírása során elhagyjuk a legkisebb címkéjű elsőfokú pontot, majd leírjuk a megmaradt szomszédjának címkéjét. Ezt folytatjuk addig, amíg van él. Az 1.46. állítás szerint az így kapott kód $n - 1$ hosszú lesz, és a fához egyértelműen rendeltük hozzá. Vegyük észre, hogy a Prüfer-kód utolsó helyére mindig n kerül.

Az 1.19. ábrán látható fa Prüfer-kódja pl.: 11363559.

A most következő tételt Cayley¹³ igazolta, mi a Prüfer által adott bizonyítást közöljük.

¹²Ernst Paul Heinz Prüfer (Wilhelmshaven, 1986. november 10. - Münster, 1934. április 7.) német matematikus, főként algebrával, analízissel foglalkozott.

¹³Arthur Cayley (Richmond, 1821. augusztus 16. - Cambridge, 1895. január 26.) brit matematikus. Sokáig ügyvédként dolgozott, de folyamatosan publikálta matematikai cikkeit is. Főleg algebrával és kombinatorikával foglalkozott.



1.19. ábra. Egy fa 9 címkézett csúcson

1.47. Tétel (Cayley-tétel). A $2 \leq n$ címkézett csúcson megadható fák száma n^{n-2} .

Bizonyítás. Azt fentebb láttuk, hogy minden n címkézett csúcsú fának megfelel egy $n-1$ számból álló Prüfer-kód. Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges $n-1$ számból álló kód is megad egy fát, vagyis dekódoljuk a Prüfer-kódot. Legyen a kód: $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$, ahol $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén, $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ a letörölt csúcsok címkéinek sorozata. Az első letörölt csúcs:

$$b_1 = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}\},$$

vagyis a legkisebb olyan címke, mely nem szerepel a kapott kódban. Kijelölve az első letörölt csúcs címkéjét, behúzzhatjuk az a_1, b_1 élt. A második letörölt csúcs:

$$b_2 = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq b_1, j \notin \{a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}\},$$

azaz az első csúcs letörlése után a legkisebb olyan címke, amely az $a_2 \dots a_{n-1}$ kódban nem szerepel. Ha megvan b_2 , akkor az $\{a_2, b_2\}$ élt is behúzzhatjuk. Az eljárást hasonlóan folytatjuk, az i . letörölt csúcs címkéje:

$$b_i = \min\{j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}\}, j \notin \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}\}, \quad (1.1)$$

$i = 1, \dots, n-1$, és minden egyes b_i megkapása után behúzzuk az $\{a_i, b_i\}$ élt. Ilyen b_i -t mindig tudunk választani, mert az n db lehetséges címke közül a $j \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}\}, j \notin \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}$ feltételek is legfeljebb csak $n-1$ db-ot zárnak ki. Ily módon egy n csúcsú gráfot kapunk. Megmutatjuk hogy ez a gráf fa. Indirekt tegyük fel, hogy nem az, akkor van benne kör. Vegyük észre, hogy a b_i címkék meghatározása során mindig egy új csúcsot, és abból kiinduló új éleket húzunk be a gráfba, mely a_i -be megy. Az i . lépés után tehát i db b_j típusú csúcs és egy db a_i alkotja a gráfunkat. Ha a gráfban lenne kör, akkor annak valamelyik ilyen lépés után zárulnia kellene, ez viszont egy már meglévő b_i felvételét igényelné, ami ellentmond (1.1)-nek. A kapott gráf tehát összefüggő, és nincs benne kör, vagyis az 1.42. definíció szerint fa.

Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ kódhoz tartozik egy fa, aminek ez a kód éppen a Prüfer-kódja. A kódban annyi megkötés van, hogy $a_{n-1} = n$, a többi $n-2$ db eleme tetszőleges az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemei közül. Másrészt a fákhoz is egyértelműen tartozik Prüfer-kód, emiatt az n címkézett ponton megadható fák száma és a megfelelő $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ kódok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Az ilyen kódokból n^{n-2} db van, ennyi tehát a lehetséges fák száma is. $\square$

Példák

1.48. Példa. Mutassuk meg, hogy egy fában a csúcsok és az élek számának szorzata páros!

Megoldás: A csúcsok száma legyen n , akkor az 1.46. állítás szerint $n - 1$ éle van. Az $n(n - 1)$ szorzat így páros lesz, hiszen vagy n , vagy $n - 1$ páros szám.

1.49. Példa. Egy n csúcsú fa Prüfer-kódja $n - 1$ azonos számjegyből áll. Mi a fa, amit kódol, és mi ez a szám?

Megoldás: A Prüfer-kód utolsó számjegye a legnagyobb címkéjű csúcs címkéje, jelen esetben n . A Prüfer-kód tehát $n - 1$ db n -es számjegyből áll. Az 1.47. Cayley-tétel szerint visszafejthetjük a kódot, az első felrajzolt csúcs az 1-es címkéjű, és az n . csúcshoz csatlakozik. Hasonlóan végiggondolható, hogy a második berajzolt csúcs a 2-es címkéjű, és szintén az n . csúcshoz csatlakozik. Az eljárást folytatva látjuk, hogy a kérdéses fa olyan, hogy az $1, 2, \dots, n - 1$. csúcs mindegyike egy-egy éllel csatlakozik az n . csúcshoz - az ilyen gráfot hívják n csúcsú csillagnak.

1.4. Párosítások, páros gráfok

1.50. Definíció (párosítás). Párosításnak nevezzük egy gráf éleinek olyan részhalmazát, amiben az élek függetlenek, azaz semelyik kettőnek nincs közös pontja.

A gyakorlatban sokszor előforduló kérdés az, hogy egy párosítás mikor fedi le a gráf összes csúcsát. Így definiáljuk a következő fogalmat:

1.51. Definíció (teljes párosítás). Teljes párosításnak nevezzük egy gráfban az olyan párosítást, melynek élei az összes csúcsot lefedik.

A kérdés természetesen az, hogy mikor van egy gráfban teljes párosítás? A gráfok egy speciális osztályára bizonyítottunk szükséges és elégséges feltételt.

1.52. Definíció (páros gráf). Egy G gráf páros gráf, ha csúcshalmaza két részhalmaz diszjunkt uniója, és összes éle olyan, hogy egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részhalmazban van.

A páros gráfokat sokszor $G = (A, B, E)$ -ként jelöljük, ahol A, B a két részhalmaz, E pedig az élhalmaz. A következőkben használjuk a következő jelölést: C_n jelöli az n -hosszú kört, vagyis az olyan gráfot, melynek n csúcsa van, és ezek egy kör mentén vannak felfűzve.

1.53. Tétel. Egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha részgráfként nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ha G páros, akkor $G \not\supset C_{2k+1}$ minden $k \geq 1$ esetén, hiszen minden $k \geq 1$ -re igaz, hogy C_{2k+1} maga nem páros, azaz csúcsai nem oszthatók a kívánt módon két részre, ezért páros gráf részgráfja sem lehet.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy minden $k \geq 1$ esetén $C_{2k+1} \not\subset G$. Elegendő összefüggő gráfra bizonyítani (ha a gráf nem összefüggő, tekintsük komponensenként). Legyen tehát G összefüggő, páratlan kör mentes, és tekintsük G egy T feszítőfáját (olyan feszített részgráfját G -nek, mely minden csúcsát tartalmazza, és fa). A fák párosak, így a feszítőfa csúcsai beoszthatók a kívánt módon két osztályba, és ez a beosztás egyértelmű.

Rögzítsük a csúcsok ezen kettéosztását. Ha G nem T -beli élei körül valamelyik két azonos részhalmazba került csúcsot köt össze, akkor ezen csúcsok távolsága T -ben páros (vagyis páros sok él van az őket összekötő útban). Ezt az utat a most tekintett él páratlanná zárja, vagyis létezik páratlan kör, ami ellentmondás.

Tehát ha nincs páratlan kör a gráfban, akkor a széjosztással keletkező osztályokban olyan pontok vannak, melyek között nem futhat él, így a definíció szerint a kettéosztás egész G -re jó: G páros. $\square$

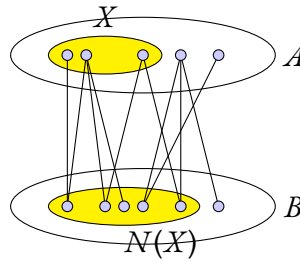
1.4.1. Teljes párosítás páros gráfban

Vizsgáljuk most meg, mikor van egy páros gráfban teljes párosítás. Szükséges pl., hogy ha a szétosztással keletkező ponthalmazok A , illetve B , akkor $|A| = |B|$ teljesüljön, ne legyen izolált pontja, és ne legyen több elsőfokú csúcs egyetlen szomszédja ugyanaz a pont.

A megfelelő tételek kimondásához tekintsük a következő jelölést: $G = (A, B, E)$ páros gráfban az $X \subseteq A$ halmaz szomszédsága az

$$N(X) := \{b \in B \mid \exists a \in X, \text{ hogy } \{a, b\} \in E\}$$

halmaz (1.20. ábra).



1.20. ábra. X szomszédsága

Hall¹⁴ brit matematikus egy sokkal általánosabb eredményéből következik az alábbi tétel, mely fontos feltételét adja a teljes párosítás létezésének:

1.54. Tétel (Hall-tétel). Ha $G = (A, B, E)$ páros gráf, akkor éppen akkor és csak akkor létezik az A minden csúcsát fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X|$.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy a gráfban van A minden csúcsát fedő párosítás. Ha indirekt létezik $X \subseteq A$, amire $|N(X)| < |X|$, akkor a skatulyaelv szerint nem jut minden X -beli pontnak $N(X)$ -beli pár, azaz G -ben nem lehetne A -t fedő párosítás, ami ellentmondás. Tehát ha van A -t fedő párosítás, akkor $|N(X)| \geq |X|$.

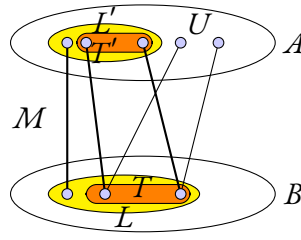
$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $|N(X)| \geq |X|$ minden $X \subseteq A$ -ra. Legyen $M \subseteq E$ egy maximális méretű párosítás G -ben (olyan párosítás, mely a lehető legtöbb élet tartalmazza). Tegyük fel indirekt, hogy M nem fedi A összes pontját, a fedetlenek halmaza legyen U .

Bevezetjük a következő fogalmakat: *alternáló útnak* nevezzük (M -hez viszonyítva) az olyan utat, amelynek élei felváltva vannak M -ben és azon kívül. *Javító útnak* nevezzük (M -hez viszonyítva) az olyan alternáló utat, melynek első és utolsó pontja is fedetlen M által. Az elnevezés értelemszerű: ha a gráfban M -hez viszonyítva még van javító út, akkor ennek M -beli éleit elhagyva, M -ben eddig nem szereplő éleit pedig hozzávéve M az út által nem fedett részhalmazához, M -nél eggyel több elemű párosítást kapunk.

Feltételeink szerint G -ben nincs M -re vonatkozó javító út (hiszen M maximális párosítás). Legyen T azon B -beli csúcsok halmaza, ami elérhető U -ból alternáló úton. Mivel nincs javító út, $T \subseteq L$, ahol L az M által fedett B -beli pontok halmaza. Legyen ekkor $L' \subseteq A$ az A -beli, M által fedett pontok halmaza, $T' \subseteq A$ a T -beli pontok M -szerinti párjainak halmaza (1.21. ábra).

Vegyük észre, hogy az U -beli csúcsok minden szomszédja T -ben van, mert tetszőleges U -ból induló él egymagában egy speciális alternáló út, így másik végpontja T -ben van.

¹⁴Philip Hall (Hampstead, 1904. április 11. - Cambridge, 1982. december 30.) brit matematikus, főként algebrával foglalkozott.



1.21. ábra. Az 1.54. tétel bizonyításához

Másrészt a T' -beli csúcsok minden szomszédja is T -ben van, mert tetszőleges $y \in T'$ -be eljuthatunk y -nak T -beli párján keresztül U -ból alternáló úton. Ha y -ból menne T -n kívülre él, ezzel folytathatnánk ezt az alternáló utat, a másik végpont tehát elérhető U -ból alternáló úton, így definíció szerint ez is T -ben volna.

Az észrevételek alapján: $N(T' \cup U) \subseteq T$, sőt $N(T' \cup U) = T$. De mivel $U \cap T' = \emptyset$, és $U \neq \emptyset$, ezért $|T| = |T'| < |T' \cup U|$, így $|N(T' \cup U)| < |T' \cup U|$, vagyis az $X := T' \cup U$ halmaz nem teljesíti az $|N(X)| \geq |X|$ feltételt, ami ellentmondás. Vagyis $U = \emptyset$, és így G -ben van A minden csúcsát fedő párosítás. $\square$

Az 1.54. tétel bizonyításában konstruktív módszert is adtunk – megfelelő feltétel mellett – egy A -t fedő párosítás megtalálásához. A módszert Harold W. Kuhn¹⁵ dolgozta ki 1955-ben Kőnig Dénes¹⁶ és Egerváry Jenő¹⁷ munkái nyomán, és tiszteletükre *magyar módszernek* nevezte el. Az elnevezés azóta is széles körben használatos.

Hall tételéből már könnyen következik a teljes párosítás egy szükséges és elégséges feltételét megfogalmazó Frobenius¹⁸-tétel:

1.55. Tétel (Frobenius-tétel). A $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X|$ és $|A| = |B|$.

Bizonyítás. A tétel adódik az 1.54. Hall-tételből annak felhasználásával, hogy egy A -t fedő párosítás pontosan akkor teljes párosítás, ha $|A| = |B|$. $\square$

Példák

1.56. Példa. Egy munkahelyen 8 állásra hatan jelentkeztek. Albert az 1., 2., 3., 4., 5. és 6. állásra, Barbi a 2., 5. és 8. állásra, Csaba a 2. és 5. állásra, Dani és Erika a 2. és 8. állásra, Feri az 1., 2., 3., 4., és 7. állásra. Hány embert tudnak maximum hatuk közül foglalkoztatni, ha minden állásra egy ember kell?

Megoldás: Mivel Barbi, Csaba, Dani és Erika egyaránt csak a 2., 5. és 8. állásra pályáztak, ezért egyikük biztosan munka nélkül marad, így legfeljebb öten kaphatnak munkát. Ennyien tudnak is, pl. Albert kapja az 1.-t, Barbi a 2.-at, Csaba az 5.-et, Dani a 8.-at, és végül Feri a 7.-et.

¹⁵Harold Williem Kuhn (Santa Monica, 1925. július 29. - New York, 2014. július 2.) amerikai matematikus. Főként játékelmélettel foglalkozott, illetve fontos eredménye a fenti magyar módszer leírása.

¹⁶Kőnig Dénes (1884. szeptember 21. - 1944. október 19.) magyar matematikus. Gráfelmélettel és topológiával foglalkozott, nevéhez kapcsolódik az első gráfelméleti könyv megírása. A szintén matematikus Kőnig Gyula fia.

¹⁷Egerváry Jenő (Debrecen, 1861. április 16. - Budapest, 1958. november 30.) magyar matematikus. Kőnig Dénes munkájának továbbfejlesztése lett az alapja a magyar módszernek, mely a gráfelmélet, majd az operációkutatás fejlődéséhez vezetett. Főbb kutatási területei a geometria, differenciálgeometria, illetve ezek műszaki, fizikai alkalmazásai voltak.

¹⁸Ferdinand Georg Frobenius (Berlin, 1849. október 26. - Charlottenburg, 1917. augusztus 3.) német matematikus. Kiemelkedő eredményeket ért el az algebra és a differenciálegyenletek területén.

1.57. Példa. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább hat embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.

Megoldás: A társaság tagjait ábrázolhatjuk egy gráffal, ahol azonos neműeket nem, két ellenkező nemű embert pedig akkor kötünk össze éllel, ha ismerik egymást. Az így nyert gráf páros, a két halmazt a fiúk, illetve a lányok alkotják. Azt kell igazolnunk, hogy ebben a gráfban van teljes párosítás. Mivel a fiúk és lányok száma egyenlő, ezért az 1.55. Frobenius-tétel szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy teljesül az 1.54. Hall-tétel feltétele, ami most azt jelenti, hogy bármely n db fiúnak van legalább n lányismerőse.

Ha $n \leq 6$, akkor ez igaz, mivel már egy fiúnak is legalább 6 ismerőse van.

Ha $n \geq 7$, akkor pedig az n fiúnak mind a 12 lány ismerőse, mert ha lenne olyan lány, akit a kiválasztott fiúk egyike sem ismer, akkor az ismeretségek kölcsönös volta miatt a lánynak legfeljebb $12 - n \leq 12 - 7 = 5$ ismerőse lehetne, ami ellentmond a feladat feltételének.

Így tehát igaz a Hall-feltétel, vagyis van teljes párosítás, és a társaság a kívánt módon párokba állítható.

1.5. A síkbarajzolhatóságról

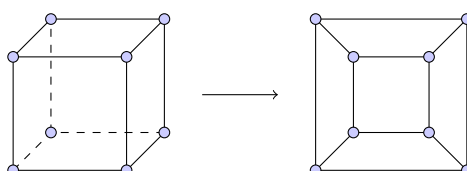
A gráfok további speciális osztályát alkotják azok, melyeket „le tudunk rajzolni”, a síkba úgy, hogy az élek (a csúcsok kivételével) nem keresztezik egymást.

1.58. Definíció (síkbarajzolható gráf). A G gráf síkbarajzolható, ha „lerajzolható” a síkba úgy, hogy élek csak közös végpontokban találkozhatnak.

1.59. Állítás. Egy gráf síkbarajzolható $\Leftrightarrow$ gömbre rajzolható.

Bizonyítás. Az állítás adódik ún. *sztereografikus projekcióval*. Tegyük fel, hogy a gráf gömbre rajzolható, és vegyük fel a gömb északi pólusát úgy, az ne essen egybe egyik csúccsal se. Legyen a sík a gömb érintője a gömb déli pólusánál. Ekkor az északi pólust a gráf csúcsaival összekötő egyenesek a síkot metszik, és megfelelően kijelölik a gráf csúcsait a síkon. Ez a megfeleltetés fordítva is működik, tehát az állítás igaz. $\square$

A kocka gráfja esetén a projekció pl. az 1.22. ábrán látható eredményt adja.



1.22. ábra. Sztereografikus projekció a kockára

Ha egy gráf síkbarajzolható, akkor a síkot tartományokra bontja, melyek száma egyértelmű.

1.5.1. Az Euler-formula

A síkbarajzolhatóság vizsgálatánál fontos szerepet játszik a következő alapvető tétel.

1.60. Tétel (Euler-formula). Ha G síkbarajzolható gráf, melynek n csúcsa, e éle, c komponense és egy tet-szőleges síkbarajzolása esetén t tartománya van (beleértve a külső, végtelen tartományt is), akkor

$$n + t = e + c + 1. \quad (1.2)$$

Speciálisan, ha G gráf összefüggő, akkor $c = 1$, így az 1.60. formula az $n + t = e + 2$ egyenletet adja.

Bizonyítás. Legyen G az állítás szerinti gráf, és tekintsük egy síkbarajzolását a mondott n, e, c, t paraméterekkel.

Hagyjuk el egyesével az éleket, ekkor (1.2) igazsága nem változik, mivel minden egyes él elhagyásakor $c \mapsto c + 1$ vagy $t \mapsto t - 1$ következik be, és mindig csak az egyik. Így (1.2) egyenlet mindkét oldala ugyanannyival változik, így igaz marad. Akkor ha minden élet elhagyunk: $e = 0, n = n, t = 1, c = n$, vagyis (1.2) az $n + 1 = 0 + n + 1$ alakot ölti, ami igaz, és átalakításaink ekvivalens volta miatt ekkor az eredeti egyenlőség is igaz. $\square$

1.61. Megjegyzés. Az 1.60. tétel következménye, hogy ha egy konvex poliédernek n csúcsa, e éle és l lapja van, akkor $n + l = e + 2$, ez az ún. Euler-féle poliédertétel.

Az 1.60. tétel egyszerű következményei a következő állítások.

1.62. Állítás. Ha G n csúcsú, e élű síkbarajzolható egyszerű gráf, akkor $e \leq 3n - 6$.

Bizonyítás. Legyen G egy síkrajzán az i oldalú tartományok száma t_i , ekkor $t = t_3 + t_4 + \dots + t_k$ valamely k -ra. Továbbá az is igaz, hogy

$$2e = 3t_3 + 4t_4 + \dots + it_i + \dots + kt_k \geq 3t,$$

amiből $t \leq \frac{2}{3}e$. Mivel G összefüggő, ezért az 1.60. Euler-formula szerint $n + t = e + 2$, így

$$n + \frac{2}{3}e \geq e + 2$$

$$3n + 2e \geq 3e + 6$$

$$3n - 6 \geq e,$$

és ezt kellett igazolni. $\square$

1.63. Állítás. Ha G síkbarajzolható egyszerű gráfban a legrövidebb kör hossza legalább 4, akkor $e \leq 2n - 4$.

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint az 1.62. tétel igazolásánál, csak itt

$$2e = 4t_4 + 5t_5 + \dots + kt_k \geq 4t,$$

amiből $t \leq \frac{1}{2}e$, így az 1.60. Euler-formula szerint:

$$n + t = e + 2$$

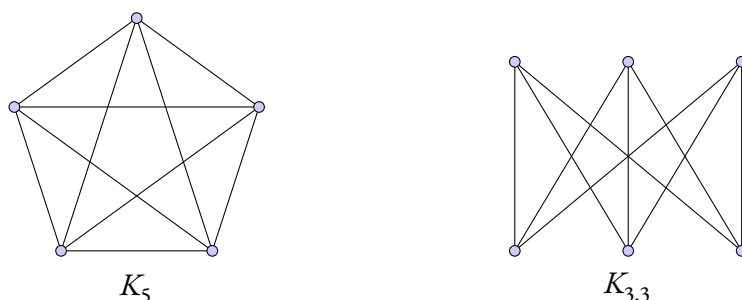
$$n + \frac{1}{2}e \geq e + 2$$

$$2n + e \geq 2e + 4$$

$$e \leq 2n - 4,$$

amit igazolni kellett. $\square$

Ezen két állítás segítségével igazolható, hogy az 1.23. ábrán látható nevezetes gráfok nem síkbarajzolhatóak.



1.23. ábra. Két nevezetes, nem síkbarajzolható gráf

1.64. Állítás. Az 1.23. ábrán látható K_5 és $K_{3,3}$ gráfok nem síkbarajzolhatóak.

Általában is, $K_{n,m}$ -mel szokás jelölni az olyan páros gráfot, melynek egyik osztályában n , másik osztályában m csúc található, és a páros gráf definíciója mellett az összes lehetséges él be van húzva.

Bizonyítás. Az öt csúcú teljes gráf élszáma: $|E(K_5)| = 10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$, így az 1.62. állítás megfordítása miatt K_5 nem síkbarajzolható. Teljesen hasonlóan, mivel $K_{3,3}$ páros gráf, ezért az 1.53. tétel értelmében a legrövidebb kör hossza benne legalább 4, viszont $|E(K_{3,3})| = 9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$, amiből az 1.63. állítás megfordítása szerint adódik, hogy $K_{3,3}$ sem síkbarajzolható. $\square$

A $K_{3,3}$ gráfot szokás *három ház-három kút gráfnak* is nevezni. Ennek oka a következő feladat: Adott három ház és három kút. Lehetséges-e minden háztól minden kúthoz olyan utakat építeni, hogy a keletkező utak nem keresztezik egymást? Az 1.64. állítás következménye, hogy ilyen utak nem építhetők meg.

1.5.2. Síkbarajzolható gráfok színezése

A fejezet alapvető kérdése szintén egy gyakorlati problémából származik, melyet először a 19. században vetettek fel: hány szín szükséges egy politikai térkép színezéséhez? Ennek során azt várjuk el, hogy szomszédos országok színei különbözők legyenek, illetve feltesszük, hogy az országok nem állnak különálló régiókból (innen-től kezdve a probléma specializált, hiszen a valóságban rengeteg ország nem teljesíti ezt a feltételt). A probléma matematikai megfogalmazásához a következő fogalmak szükségesek:

1.65. Definíció (jó színezés). G gráf csúcsainak jó színezése egy olyan $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ függvény, amire ha $\{u, v\} \in E(G)$, akkor $c(u) \neq c(v)$ teljesül.

A természetes számok halmaza helyett szerepelhet a „színek halmaza” kifejezés is, de általában természetes számokkal címkézzük a csúcsokat. A definíció szerint egy gráf jól színezett, ha az összekötött csúcsok színe különböző.

1.66. Definíció (kromatikus szám). Egy G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma az a minimális k színszám, amivel G csúcsai jól színezhetők.

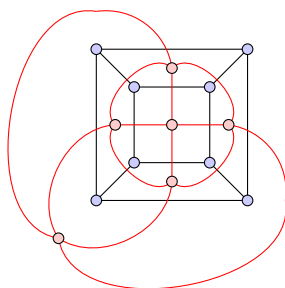
Egyszerűen látható pl., hogy bármely n csúcsú teljes gráfra $\chi(K_n) = n$.

Visszatérve a „térképek” színezésének problémájához, ennek az felel meg, hogy egy adott síkbarajzolható gráf tartományait színezzük. Jelöljük a tartományokat csúcsokkal, és két csúcs akkor legyen összekötve, ha az általuk reprezentált tartományoknak van közös határa (éle). Ekkor a feladat ekvivalens azzal, hogy az így kapott gráfnak mennyi a kromatikus száma. Emiatt vezetjük be a következő definíciót:

1.67. Definíció (geometriai duális). Ha G síkbarajzolható gráf, és tekintjük egy síkrajzát, akkor ennek a „lerajzolt gráfnak” úgy kapjuk a geometriai duálisát, hogy az eredeti gráf tartományaiba helyezzük a duális gráf csúcsait, és két csúcsot összekötünk, ha a megfelelő tartományok szomszédosak.

Mivel a szabályos testek gráfjai gömbre rajzolhatók, ezért az 1.59. állítás szerint síkbarajzolhatók is, így értelmes beszélni geometriai duálisukról. Könnyen látható, hogy a tetraéder önduális, a kocka duálisa az oktaéder, az ikozaéder duálisa pedig a dodekaéder.

Az 1.24. ábrán a kocka és duálisa látható.



1.24. ábra. A kocka és duálisa, az oktaéder gráfja

A geometriai duális elnevezés arra utal, hogy van olyan gráf, melynek vannak nem izomorf geometriai duálisai, vagyis hogy a geometriai duális függ a síkbarajzolás geometriájától. Mi ettől most eltekintünk, hiszen a konkrét problémánk, a térképszínezés kapcsán, adott térképet kapunk, melynek egyértelmű a duálisa.

A fentiek szerint tehát adott egy síkbarajzolható gráf, és a kérdés az, hogy duálisának mennyi a kromatikus száma. Mivel a duális szintén síkbarajzolható, ezért a kérdés a síkbarajzolható gráfok kromatikus számának meghatározására egyszerűsödik. A probléma felvetése óta ismert volt a sejtés, miszerint egy síkbarajzolható gráf színezésére négy szín mindig elég. A 20. század közepéig kellett várni a bizonyításra, a bizonyítás azonban számos egyszerűsítés és javítás után is rendkívül hosszú, és a mai napig számítógépek használatát igényli.

Ennél egy egyszerűbb állítást bizonyítottunk, mégpedig azt, hogy öt szín mindig elég. Ehhez először tekintjük a következő állítást:

1.68. Állítás. Ha G gráf síkbarajzolható egyszerű gráf, akkor $\delta(G) \leq 5$, ahol $\delta(G)$ jelöli a gráf minimális foksámát.

Bizonyítás. Legyen a gráf csúcsainak száma n , és indirekt tegyük fel, hogy $\delta(G) \geq 6$. A gráf éleinek száma több, mint abban az esetben, ha minden csúcs foka $\delta(G)$ lenne, amikor is az élek száma $\frac{n \cdot \delta(G)}{2}$ (n db csúcsból $\delta(G)$ él indul ki, és így minden élet kétszer számolunk). Tehát

$$|E(G)| \geq \frac{n \cdot \delta(G)}{2} \geq \frac{6n}{2} = 3n,$$

ami ellentmond az 1.62. állításnak. □

Ezek után megfogalmazható a következő tétel:

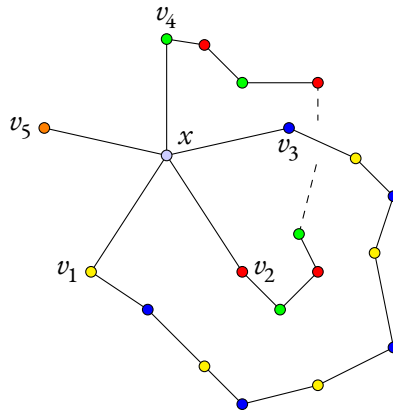
1.69. Tétel (ötszín-tétel). Ha G egyszerű síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 5$.

Bizonyítás. Tekintsünk indirekt egy minimális ellenpéldát, azaz olyan minimális csúcsú G síkbarajzolható gráfot, mely nem színezhető 5 színnel. Az 1.68. állítás szerint $\delta(G) \leq 5$, ugyanakkor a minimális ellenpéldaság miatt $\delta(G) \geq 5$. Ha ugyanis lenne legfeljebb negyedfokú v csúcs, akkor ezt a csúcsot a gráfból elhagyva a $G \setminus \{v\}$ gráf már öt színnel színezhető lenne (hiszen G a legkesebb csúcsú síkbarajzolható gráf, amire ez nem igaz), és v -t tetszőleges olyan színezve, mely nem szerepel szomszédainak színei között, G -ben is jó öt színnel való színezést kapnánk, ami nem lehetséges.

Tehát $5 \leq \delta(G) \leq 5$, amiből következik, hogy $\delta(G) = 5$, a gráfnak így van ötödfokú csúcsa, legyen ez x , szomszédai v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Tekintsük $G' = G \setminus \{x\}$ -nek egy $c : V(G \setminus \{x\}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ színezését (mivel ez kevesebb csúcsú gráf G -nél, színezhető 5 színnel). G ellenpélda volna miatt $c(v_i) \neq c(v_j)$, ha $i \neq j$. Ha ugyanis lenne két azonos színű szomszédja x -nek, akkor a szomszédok színei közt nem szereplő színnel x -et színezve, öt színnel tudnánk színezni G -t is.

Tekintsük G -nek azon részgráfját, amelynek csúcsai c szerint $c(v_1)$ vagy $c(v_3)$ színűek. Ha ebben a részgráfban v_1 és v_3 külön komponensbe esik, akkor v_3 komponensében a $c(v_1) \leftrightarrow c(v_3)$ színcserével olyan 5-színezést kapjuk a $G \setminus \{x\}$ gráfnak, ahol v_1 és v_3 azonos színű, és ez az 5-színezés az előzőek szerint kiterjeszthető lenne x -re új szín használata nélkül, vagyis G nem lenne ellenpélda.

Emiatt van út v_1 és v_3 között, amelyen minden csúcs $c(v_1)$ vagy $c(v_3)$ színű (1.25. ábra).



1.25. ábra. Az 1.69. tétel bizonyításához

Hasonlóan, létezik út v_2 és v_4 között, melyben minden csúcs $c(v_2)$ vagy $c(v_4)$ színű. E két út csúcsban nem keresztezheti egymást (ezen csúcs egyszerre két színt kapna), élből pedig azért nem, mert G síkbarajzolható. Ugyanakkor jól látható, hogy keresztezniük kellene egymást, ami ellentmondás. Vagyis nincs ellenpélda, a tétel igaz. $\square$

Példa

1.70. Példa. Mutassuk meg, hogy a nyolcpontú teljes gráf síkbarajzolásakor legalább 10 élkereszteződés jön létre!

Megoldás: Az 1.15. tétel szerint a gráfnak $\binom{8}{2}$ éle van. Tegyük fel, hogy a gráfot sikerült síkba rajzolnunk legfeljebb 9 élkereszteződéssel. Szüntessük meg az összes élkereszteződést valamelyik benne szereplő él elhagyásával. Így egy síkbarajzolható gráfot kapunk, melynek legalább $\binom{8}{2} - 9 = 20 - 9 = 19$ éle van, ugyanakkor

8 csúcsa. Mivel $19 > 3 \cdot 8 - 6 = 18$, ezért ez ellentmond az 1.62. állításnak. Viszont logikailag helyes következtetéseket végeztünk, csak a kiinduló feltevés lehet rossz, tehát legalább 10 élkereszteződés bármelyik síkbarajzoláskor létrejön.

1.6. Ramsey-típusú tételek

A most következőkben tárgyalt tételek a *skatulyaelv* egyfajta általánosításának tekinthetők: arról szólnak, hogy megfelelő méretű gráf-struktúrákban, illetve azok komplementerében bizonyos részgráfok mindenképpen előfordulnak¹⁹. A probléma ismét gyakorlati motivációval rendelkezik, hiszen egy gráfban az élek tipikusan a pontok közti kapcsolatot jellemzik. Egy adott méretű részgráf előfordulása megfelelően nagy méretű gráfban azt jelenti, hogy az olyan alkalmazásokban, melyeknek az adott méretű gráffal modellezhetők, szükségképpen létrejönnek bizonyos formájú kapcsolatok.

Az állítások precíz megfogalmazásához tekintsük a következő definíciót.

1.71. Definíció (klikk). Egy n csúcsú G gráf k csúcsú teljes részgráfját ($k \leq n$) a G gráf egy k -klikkjének nevezzük.

A 3-klikket *háromszögnek*, a 4-klikket *teljes négyszögnek*, általában a k -klikket *teljes k -szögnek* is nevezzük.

A gráfelméletben az ún. Ramsey²⁰-típusú tételek legegyszerűbb változatai arról szólnak, hogy egyszerű gráfok esetén kellőképpen nagy csúcsszám mellett esetén már biztosak lehetünk abban, hogy a gráfban vagy a komplementerében található megfelelő méretű klikk.

A témáról könnyebb beszélni a következő formában: egy n csúcsú teljes gráf éleit két színnel – például pirossal és kékkel – színezzük. Ekkor a Ramsey-típusú tételek arról nyilatkoznak, hogy ha a teljes gráf kellőképpen nagy csúcsszámmal rendelkezik, akkor a piros vagy a kék élek (és az általuk meghatározott csúcsok) által meghatározott részgráfok valamelyikében már található megfelelő méretű klikk. Látható, hogy ez a megfogalmazás ekvivalens a probléma előző, komplementerrel történő megfogalmazásával²¹.

Legyen $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n, k \geq 2$, és keressünk olyan csúcsszámú teljes gráfokat, melyek éleit piros, illetve kék színnel színezve létrejön piros n -klikk vagy kék k -klikk.

Ha $n = 2$, k tetszőleges, akkor egy k csúcsú teljes gráf megfelelő: vagy van a gráfban 2-klikk (azaz legalább egy él), vagy a komplementerben van egy teljes k -klikk (tudniillik ha a gráfban nincs él, azaz üres gráf, akkor komplementere maga a k csúcsú teljes gráf). Az is egyszerűen látszik, hogy k -nál kisebb csúcsszám esetén nem garantált, hogy a gráfban van él, vagy a komplementerben k -klikk. Ha viszont a teljes gráf csúcsszáma már k -nál nagyobb, akkor értelemszerűen az ilyen teljes gráfok is megfelelők (tekintsük bármely k csúcsú részgráfjukat, arra már igaz lesz az állítás). Azt kaptuk tehát, hogy a lehető legkisebb méret, amely mellett a gráfban van piros 2-klikk vagy kék k -klikk, éppen k .

Ha n tetszőleges, és $k = 2$, akkor az előzőhöz hasonlóan egy n csúcsú teljes gráf megfelelő, és ennél kisebb csúcsszám esetén már az n -klikk, illetve k -klikk létezése a megfelelő részgráfokban nem garantált, nagyobb csúcsszám esetén viszont már ugyancsak garantált a piros n -klikk vagy a kék 2-klikk létezése.

Az első izgalmasabb eset az $n = 3$, $k = 3$ eset.

¹⁹A skatulyaelvnel n skatulya esetén $n + 1$ elem esetén tudjuk azt mondani, hogy legalább az egyik skatulyában legalább két elem mindenképpen előfordul.

²⁰Frank Plumpton Ramsey (Cambridge, 1903. február 22. - London, 1930. január 19.) angol matematikus, filozófus, közgazdász. Az általa igazolt, ma már Ramsey-típusúnak nevezett tételek valójában csak segédtételei voltak egy nagyszabásúbb munkájának, ugyanakkor gyümölcsözőnek bizonyultak.

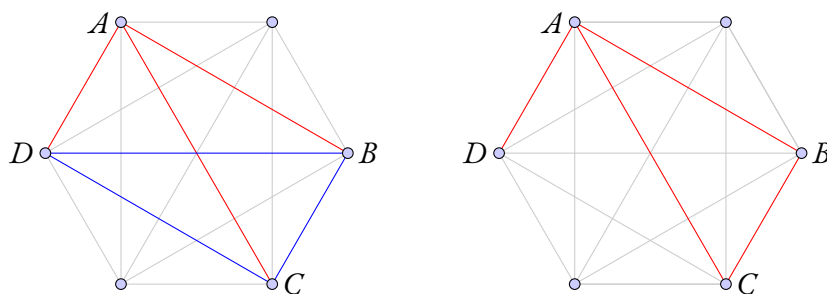
²¹A probléma ugyanakkor ebben a megfogalmazásban könnyen általánosítható: elképzelhető az is, hogy egy teljes gráf éleit kettőnél több színnel színezzük. Ekkor a kérdés az, hogy mekkora méretűnek kell lennie a teljes gráfnak ahhoz, hogy adott színű élek által meghatározott részgráfok valamelyikében előforduljon már egy előírt méretű klikk.

1.72. Állítás. Ha egy hat csúcsú teljes gráf éleit pirossal vagy kékkel színezzük, akkor létrejön piros vagy kék háromszög. Öt csúcs esetén van olyan teljes gráf, melynek éleit piros, illetve kék színnel színezve piros, illetve kék háromszög sem jön létre.

A komplementeres megfogalmazás szerint ez azt jelenti, hogy egy hat csúcsú egyszerű gráfban vagy a komplementerében van háromszög.

Az 1.72. állítás azt jelenti, hogy a minimális csúcsszám az $n = 3, k = 3$ esetben 6.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy hat csúcsú teljes gráf esetén vagy van piros háromszög, vagy van kék háromszög a gráfban. A teljes gráfban minden csúcs foka öt, így ha egy tetszőleges csúcsot tekintünk, abból a skatulyaelv értelmében legalább három ugyanolyan színű él indul ki - feltehető, hogy ez a szín piros (ellenkező esetben az érvelésben cseréljük fel a *kék*, illetve *piros* szavakat). Van tehát legalább egy olyan A csúcs, melyből kiindul három piros él: legyenek ezek végpontjai B, C, D . Ha a B, C, D csúcsok között nincs piros él, akkor köztük minden él kék, és ezzel találtunk egy kék háromszöget. Ha a B, C, D csúcsok valamelyike között van piros él, pl. a B és C között, akkor e két csúcs az A -val együtt már piros háromszöget alkot (1.26. ábra). Ezzel beláttuk, hogy a 6 csúcsú teljes gráf már megfelelő lesz.



1.26. ábra. Hat csúcsú teljes gráf színezése az 1.72. állítás bizonyításához

Öt csúcs esetén még előfordulhat, hogy nem kapunk sem piros háromszöget, sem kék háromszöget az élek színezése során. Az ellenpélda konstruálásához vegyük észre, hogy ha valamely csúcsból három piros él indul ki, akkor az előző érvelés működik, így ellenpéldát csak úgy találhatunk, ha minden csúcsból legfeljebb kettő piros él indul ki. Ugyanígy adódik, hogy egy csúcsból legfeljebb két kék él indulhat ki. Mivel minden csúcs foka 4, ez azt jelenti, hogy ha van ellenpélda, abban a gráfban minden csúcsból pontosan kettő piros és kettő kék él indul ki. Ez azt jelenti, hogy a gráfnak $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ piros éle, és hasonlóan 5 kék éle van. Ez csak úgy lehetséges, hogy az öt csúcsú teljes gráf élhalmaza egy 5 hosszú piros és egy 5 hosszú kék körre bomlik. Izomorfia erejéig az ellenpélda színezését az 1.27. ábrán láthatjuk²².

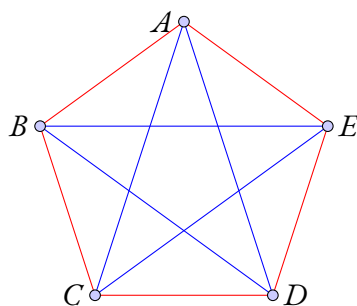
Ezzel az állítás beláttuk. □

Az $n = 3, k = 4$ esetről szól a következő állítás:

1.73. Állítás. Ha egy kilenc csúcsú teljes gráf éleit pirossal vagy kékkel színezzük, akkor létrejön piros háromszög vagy kék teljes négyszög. Nyolc csúcs esetén van olyan teljes gráf, melynek éleit piros, illetve kék színnel színezve piros háromszög, illetve kék teljes négyszög sem jön létre.

A komplementeres megfogalmazás szerint ez azt jelenti, hogy egy kilenc csúcsú egyszerű gráfban van háromszög, vagy a komplementerében teljes négyszög.

²²A bizonyításból az is következik, hogy izomorfia erejéig ez az egyetlen ellenpélda van öt csúcson.

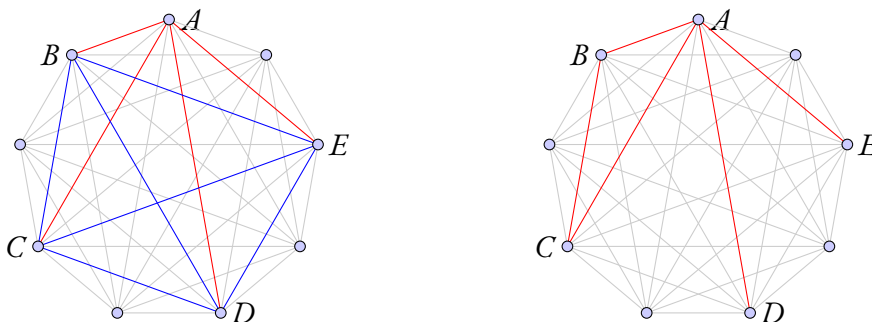


1.27. ábra. Öt csúcsú teljes gráf színezése az 1.72. állítás bizonyításához

Az 1.73. állítás azt jelenti, hogy a minimális csúcsszám az $n = 3, k = 4$ esetben 9.

Bizonyítás. A teljes gráfban minden csúcs foka 8.

Ha valamely A csúcsból legalább négy piros él indul ki, akkor legyenek e csúcsok B, C, D, E . Ha ezek között egy piros él sem fut, akkor a B, C, D, E csúcsok közti élek kék teljes négyszöget alkotnak. Ha valamelyik két pont, pl. B és C között fut piros él, akkor e két csúcs A -val együtt piros háromszöget alkot (1.28. ábra).



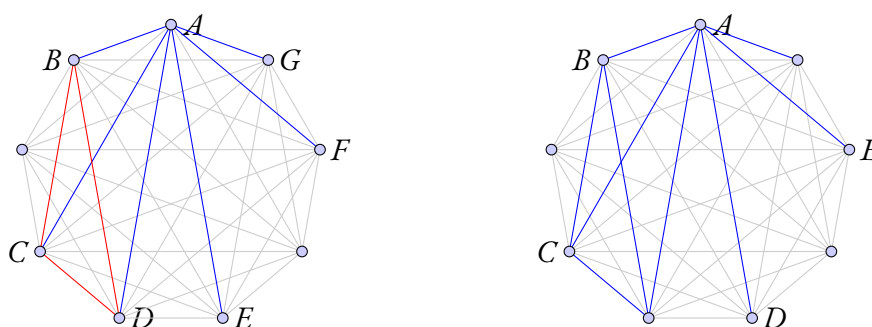
1.28. ábra. Az 1.73. állítás bizonyításához: ha valamely csúcsból 4 piros él indul ki

Ha valamely A csúcsból legalább hat kék él indul ki, akkor legyenek ezek $B; C; D; E; F; G$. E hat csúcs által meghatározott részgráfban az 1.72. állítás szerint van piros háromszög, vagy van kék háromszög. Ha piros háromszög van, akkor készen vagyunk. Ha kék háromszög van, pl. B, C, D csúcsok által meghatározva, akkor e három csúcs és A kék teljes négyszöget alkot (1.29. ábra).

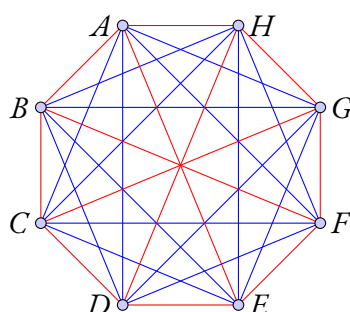
Megmutatjuk, hogy más eset nem fordulhat elő. Indirekt tegyük fel, hogy minden csúcsból legfeljebb három piros él, illetve legfeljebb 5 kék él indul ki. Mivel minden csúcs foka 8, ezért ez csak úgy lehetséges, ha minden csúcsból pontosan 3 piros és pontosan 5 kék él indul ki. Ha csak a piros élek által meghatározott gráfot tekintjük, ez azt jelenti, hogy egy kilenc csúcsú gráf minden csúcsának foka 3. Az 1.12. állítás szerint ez ellentmondás, vagyis nem lehetséges, hogy minden csúcsból legfeljebb 3 és legfeljebb 5 kék él indul ki. Akkor viszont a fenti esetek valamelyike áll elő, mely esetekben már igazoltuk az állítást.

Nyolc csúcs esetén még előfordulhat, hogy a gráfban nincs piros háromszög és nincs kék teljes négyszög sem. Egy ellenpéldát szolgáltató gráf látható az 1.30. ábrán.

A példát úgy kapjuk, hogy egy szabályos nyolcsszög szomszédos, illetve szemközti csúcsait piros, míg további átlóit kék színű éllel kötjük össze. Az így kapott piros részgráfban nincs háromszög. A kék részgráfban a szomszédos csúcsok nincsenek összekötve, így teljes négyszöget csak úgy kaphatnánk, ha minden minden



1.29. ábra. Az 1.73. állítás bizonyításához: ha valamely csúcsból 6 kék él indul ki



1.30. ábra. Az 1.73. állítás bizonyításához: 8 pontú ellenpélda

második csúcs lenne e négyszög négy csúcsa. Ekkor viszont a szemközti csúcsok közti kék él hiánya miatt nem kaphatunk teljes négyszöget.

Az állítást ezzel beláttuk. □

1.6.1. Ramsey-számok

A fentiekhez hasonló gondolatmenettel általánosabb állítást is megfogalmazhatunk.

1.74. Tétel (Ramsey-tétel). Bármely $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n, k \geq 2$ esetén létezik olyan $r(n; k)$ pozitív egész szám, hogy bármely $r(n; k)$ csúcsú teljes gráfot tekintve, annak éleit piros, illetve kék színnel színezve a gráfban van piros n -klikk vagy kék k -klikk.

A komplementeres megfogalmazásban: minden $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n, k \geq 2$ esetén létezik olyan $r(n; k)$ pozitív egész szám, hogy bármely $r(n; k)$ csúcsú egyszerű gráfban van n -klikk, vagy a komplementerében k -klikk.

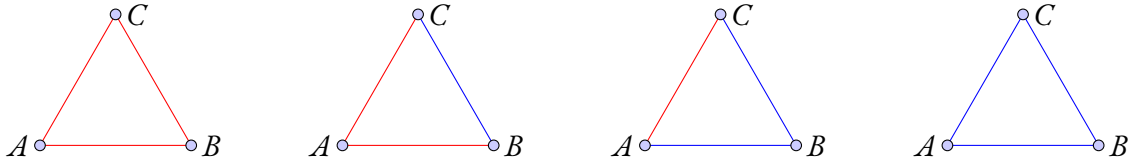
Bizonyítás. A bizonyítás $n + k =: m$ -re vonatkozó teljes indukcióval történik.

- $m = 4$: Ekkor $n = k = 2$. $r(2; 2) = 2$ (a legkisebb) jó választás, hiszen két csúcs már elég: egy két pontú teljes gráfnak egy éle van, ez vagy piros, vagy kék színű.
- $m = 5$: Ez kétféleképpen fordulhat elő: ha $n = 2$ és $k = 3$, akkor $r(2; 3) = 3$ (a legkisebb) jó választás, hiszen a 3 csúcsú teljes gráf éleit piros, illetve kék színnel színezve, vagy van a gráfban piros él, vagy mindhárom él kék színű.

Hasonlóan, az $n = 3$, $k = 2$ esetben $r(3; 2) = 3$ jó választás, hiszen 3 csúcsú teljes gráfban vagy mindhárom él piros, vagy van kék él.



1.31. ábra. Az 1.74. tétel bizonyításához: Két pontú teljes gráf éleinek lehetséges színezése



1.32. ábra. Az 1.74. tétel bizonyításához: Három pontú teljes gráf éleinek lehetséges színezése

- További egyszerű észrevétel, hogy ha $n = 2$ és k tetszőleges, vagy $k = 2$ és n tetszőleges, akkor $r(2; k) = k$ és $r(n; 2) = n$ jó választás, hiszen az első esetben egy k csúcsú teljes gráf éleit két színnel színezve, vagy van benne piros él, vagy minden éle kék színű, utóbbi esetben érvelésünk hasonló.
- A továbbiakban feltehető tehát, hogy $n, k \geq 3$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az olyan n, k párokra, melyekre $n + k = m$, és tekintsük az olyan párokat, melyekre $n + k = m + 1$.

Tekintsünk általában egy gráfot, melynek egy pontja legyen P .

- Ha P -nek a gráfban legalább $r(n - 1; k)$ piros éllel elérhető szomszédja van, akkor a gráf P -n kívüli csúcsai által meghatározott részgráfot tekintve, az indukciós feltétel szerint a gráfban van piros $n - 1$ klikk vagy kék k -klikk. Utóbbi esetben készen vagyunk, az eredeti gráfban is van kék k -klikk. Ha nincs, akkor a gráf piros $n - 1$ -klikkjének pontjait piros él köti össze P -vel, amivel együtt így piros n -klikket kapunk.
- Ha P -nek a gráfban legalább $r(n; k - 1)$ kék éllel elérhető szomszédja van, akkor a gráf P -n kívüli csúcsai által meghatározott részgráfot tekintve, az indukciós feltétel szerint a gráfban van piros n -klikk vagy kék $k - 1$ -klikk. Az első esetben készen vagyunk, az eredeti gráfban is van piros n -klikk. Ha nincs, akkor a gráf kék $k - 1$ -klikkjének pontjait kék él köti össze P -vel, amivel együtt így kék k -klikket kapunk.

Ezen megfontolásokat figyelembe véve, konstruáljunk egy teljes gráfot a következőképpen: vegyünk fel egy tetszőleges P pontot, és legyen a gráfnak P -n kívül még legalább $r(n - 1; k) + r(n; k - 1) - 1$ csúcsa. A skatulyaelv miatt ekkor az előző két feltétel valamelyike teljesül, így az így kapott teljes gráfban lesz piros n -klikk vagy a komplementerben k -klikk, azaz $r(n; k) = r(n - 1; k) + r(n; k - 1)$ megfelelő választás.

Ezzel a tételt beláttuk. □

1.75. Definíció (Ramsey-szám). Legyen $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n, k \geq 2$. Az 1.74. tétel szerint létező $r(n; k)$ számok legkisebbikét az $R(n; k)$ Ramsey-számnak nevezzük.

Az $R(n; k)$ Ramsey-szám tehát az a legkisebb pozitív egész, ahány pontú teljes gráf éleit piros, illetve kék színnel színezve már lesz a gráfban piros n -klikk vagy kék k -klikk. Komplementeres megfogalmazással, ezzel ekvivalens: $R(n; k)$ az a legkisebb pozitív egész, ahány pontú gráfban található n -klikk, vagy a komplementerében k -klikk.

1.76. Tétel. Néhány speciális Ramsey-szám:

- | | |
|--|--------------------|
| 1. $R(2; k) = k$ minden $k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2$ esetén; | 3. $R(3; 3) = 6$; |
| 2. $R(n; 2) = n$ minden $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$ esetén; | 4. $R(3; 4) = 9$. |

Bizonyítás. 1. Az 1.74. tétel bizonyításában láttuk, hogy $n = 2$, k tetszőleges esetén a lehető legkisebb megfelelő méretű teljes gráf k csúcsot tartalmaz, hiszen ennél kisebb csúcsszám esetén sem a piros él, sem a kék k -klikk nem garantálható: ellenpéldát ad egy $k - 1$ csúcsú teljes gráf, melynek minden éle kék.

2. Az 1.74. tétel bizonyításában láttuk, hogy $k = 2$, n tetszőleges esetén a lehető legkisebb megfelelő méretű teljes gráf n csúcsot tartalmaz, hiszen ennél kisebb csúcsszám esetén sem a piros n -klikk, sem a kék él nem garantálható: ellenpéldát ad egy $n - 1$ csúcsú teljes gráf, melynek minden éle piros.

3. Az 1.72. állítás éppen azt jelenti, hogy $R(3; 3) = 6$.

4. Az 1.73. állítás éppen azt jelenti, hogy $R(3; 4) = 9$.

Ezzel a tételt beláttuk. □

A következő állítás a Ramsey-számok szimmetriájáról szól.

1.77. Állítás. Minden $n, k \in \mathbb{Z}^+, n, k \geq 2$ esetén $R(n; k) = R(k; n)$.

Bizonyítás. $R(n; k)$ az a legkisebb pozitív egész szám, melyre teljesül, hogy az $R(n; k)$ csúcsú teljes gráfot piros, illetve kék színnel színezve lesz a gráfban piros n -klikk vagy kék k -klikk. Cseréljük most fel e két színt! Ekkor egy $R(n; k)$ csúcsú teljes gráfban van kék n -klikk, vagy piros k -klikk, vagyis $R(k; n) \leq R(n; k)$, hiszen $R(k; n)$ az ilyen tulajdonságú teljes gráfok közül a legkisebb méretűnek a csúcsszáma.

Ugyanezen gondolatmenettel adódik az is, hogy $R(n; k) \leq R(k; n)$. Ebből viszont adódik, hogy $R(n; k) = R(k; n)$. □

Az 1.76. tétel és az 1.77. állításból következik például, hogy $R(4; 3) = 9$ értékét is ismerjük.

A nagyobb paraméterű Ramsey-számok meghatározása napjainkban is komoly kombinatorikai probléma, főként az *átlós* ($R(n; n)$ alakú) Ramsey-számok meghatározása nehéz. $R(4; 4)$ értéke még ismert, ugyanakkor már $R(5; 5)$ és $R(6; 6)$ értékét sem ismerjük. A teljes gráfok lehetséges színezések száma n -ben exponenciálisnál gyorsabban növekszik, így a lehetséges színezések vizsgálata jelenleg számítógépes algoritmusokkal is kezelhetetlen. Erdős Pál²³, magyar matematikus a következőképpen szemléltette a számítási nehézségeket:

”Képzéljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és az $R(5; 5)$ értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fognunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett az $R(6; 6)$ értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erőnkkel meg kéne próbálnunk legyőzni őket.”

A Ramsey-számok vizsgálata napjainkban is alsó, illetve felső korlátok felállításáról szól. A fentiek alapján egy lehetséges felső korlátról szól a következő, Erdős Pál és Szekeres György²⁴ által bizonyított tétel.

²³Erdős Pál (Budapest, 1913. március 26 - Varsó, 1996. szeptember 20.) magyar matematikus. A 20. század egyik legkiemelkedőbb matematikusa. A matematika szinte minden ágában alkotott, de főként számelméleti, kombinatorikai, gráfelméleti, halmazelméleti, illetve analízis- és valószínűségszámítás-beli kutatásai kiemelkedőek. Jellegzetes, állandóan utazó életmódot folytatott, a matematika igazi katalizátoraként rengeteg emberrel dolgozott együtt.

²⁴Szekeres György (Budapest, 1911. május 29. - Adelaide, 2005. augusztus 28.) magyar- ausztrál matematikus. Főként kombinatorikával, gráfelmélettel foglalkozott.

1.78. Tétel (Erdős–Szekeres). Minden $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $n, k \geq 2$ esetén

$$R(n; k) \leq \binom{n+k-2}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy

$$R(n; k) \leq R(n-1; k) + R(n; k-1). \quad (1.3)$$

Az 1.74. tétel bizonyításának gondolatmenete megismételhető. Színezzük ugyanis piros és kék színnel egy $R(n-1; k) + R(n; k-1)$ csúcsú teljes gráf éleit, és legyen P a gráf tetszőleges csúcs. Legyen a P -ből piros élekkel elérhető csúcsok halmaza A , a kék élekkel elérhető csúcsok halmaza B . Mivel $|A| + |B| = R(n-1; k) + R(n; k-1)$, ezért $|A| \leq R(n-1; k)$ vagy $|B| \geq R(n; k-1)$ valamelyike teljesül.

Ha $|A| \leq R(n-1; k)$, akkor az A által meghatározott gráfban vagy van piros $n-1$ -klick, vagy van kék k -klick. Utóbbi esetben készen vagyunk, előbbi esetben P csúcsot A pontjaival összekötve piros n -klicket kapunk.

Ha $|B| \geq R(n; k-1)$, akkor a B által meghatározott gráfban vagy van piros n -klick, vagy van kék $k-1$ -klick. Előbbi esetben készen vagyunk, utóbbi esetben P csúcsot B pontjaival összekötve kék k -klicket kapunk.

A Ramsey-számok definíciójából így következik, hogy (1.3) teljesül.

Ezután $n+k=m$ -re vonatkozó indukciót használunk. Az 1.76. tétel 1. és 2. pontja alapján $R(n; 2) = n$ és $R(2; k) = k$. Tegyük fel most, hogy minden olyan n, m párra, melyre $n+k=m$ teljesül,

$$R(n; k) \leq \binom{n+k-2}{n-1}$$

igaz. Ekkor, ha $n+k=m+1$, akkor (1.3) és az indukciós feltétel szerint

$$R(n; k) \leq R(n-1; k) + R(n; k-1) \leq \binom{n+k-3}{n-2} + \binom{n+k-3}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-1}$$

a binomiális együtthatók additív tulajdonsága alapján. Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Példák

1.79. Példa. Mutassuk meg, hogy egy hat tagú társaságban van három olyan ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást, vagy van három olyan ember, akik közül egyik sem ismeri a másikat!

Megoldás: Szemléltessük a kapcsolatokat a következő gráffal: legyenek a gráf csúcsai az emberek, és legyen két csúcs éllel összekötve, ha a csúcsoknak megfelelő emberek ismerik egymást. Az 1.72. állítás szerint e hat pontú gráfban vagy van háromszög, vagy a komplementerben van háromszög. Ez éppen azt jelenti, hogy van három olyan ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást, vagy van három olyan, hogy egyik sem ismeri a másikat.

1.80. Példa. Bizonyítsuk be, hogy hat irracionális szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely kettő összege irracionális!

Megoldás: Szemléltessük a számok közti kapcsolatot a következő gráffal: legyenek az irracionális számok egy gráf csúcsai, és kössön össze két számot él, ha a két szám összege racionális. Ha megmutatjuk, hogy e gráfban nincs háromszög, akkor az 1.72. állítás a komplementer gráfban kell lennie, ami éppen azt jelenti, hogy van három olyan irracionális szám, melyek közül bármely kettő összege irracionális.

Tegyük fel indirekt, hogy a gráfban van háromszög, azaz létezik három olyan irracionális szám (legyenek x, y, z), amelyek közül bármely kettő összege racionális:

$$x + y = r_1 \in \mathbb{Q} \tag{1.4}$$

$$y + z = r_2 \in \mathbb{Q} \tag{1.5}$$

$$x + z = r_3 \in \mathbb{Q} \tag{1.6}$$

Vonjuk ki egymásból az (1.4) és az (1.6) egyenleteket:

$$y - z = r_1 - r_3 \tag{1.7}$$

Adjuk össze az (1.5) és az (1.7) egyenletet:

$$2y = r_2 + r_1 - r_3 \iff y = \frac{r_2 + r_1 - r_3}{2} \in \mathbb{Q},$$

hiszen a racionális számok halmaza az összeadásra, kivonásra és osztásra nézve zárt. Ez ellentmondás, hiszen $y \in \mathbb{Q}^*$, vagyis kezdeti feltevésünk helytelen volt. A gráfban tehát nincs háromszög, és a fentiek értelmében az állítást beláttuk.