

A 2003. januári Bolyai verseny feladatainak megoldásai

1. Keressük meg a 2003-nál kisebb egész számok között a legnagyobbat, amelyet egy egyjegyű számmal osztva maradékul 8-at kapunk!

6 pont

Megoldás: A keresett számot egy egyjegyű számmal osztva csak úgy kaphatunk maradékul 8-at, ha az osztó 9. A 2003-nál kisebb, 9-cel osztható legnagyobb szám 1998. 1999-től 2003-ig nincs olyan szám, amely 9-cel osztva maradékul 8-at adna. Így a keresett szám: 1997.

2. Egy esős napon 55 esernyőt adtak el, összesen ötféle színben: 5-ször annyi pirosat, mint kéket, 3-szor annyi zöldet, mint kéket, 9-cel több feketét, mint kéket, 7-tel kevesebb lilát, mint feketét. Mennyit adtak el az esernyőkből színenként?

7 pont

Megoldás: A szövegből látszik, hogy a különböző színű esernyők számát a kékek számával célszerű kifejezni.

$$p=5k; z=3k; f=k+9; l=f-7=k+2.$$

55 esernyő volt. Így $k+5k+3k+k+9+k+2=55$.

$$11k+11=55.$$

Innen $k=4$; $p=20$; $z=12$; $f=13$; $l=6$. (Ez összesen 55.)

3. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben pontosan egy 5-ös számjegy van?

7 pont

Megoldás: Ha az első helyen áll az 5, akkor a 2. és a 3. helyre is egymástól függetlenül 9 számjegy írható. (Az 5 kivételével bármi.) Ez $9 \cdot 9 = 81$ szám.

Ha az első helyen nem az 5 áll, akkor oda 8 számjegyet írhatunk. (A 0-t nem!) A 2. és a 3. hely egyikén ötös áll, a másikon 9 számjegy állhat. Ez $2 \cdot 8 \cdot 9 = 144$ szám.

Tehát összesen $81 + 144 = 225$ olyan háromjegyű szám van, amelyben pontosan egy 5-ös van.

4. Huncut Hugó egynél nagyobb egyjegyű, pozitív egész számra gondolt, amit Eszes Elek Barkochba-kérdésekkel próbált kitalálni. Íme a kérdések és a válaszok:

- | | | |
|---|--------------------|---------|
| - | — Prím? | — Nem. |
| | — Páros? | — Igen. |
| | — Osztható 4-gyel? | — Nem. |
| | — Nagyobb 3-nál? | — Nem. |

Melyik számra gondolhatott Huncut Hugó, ha tudjuk, hogy az egyik kérdésre hibás választ adott? Hány megoldása van a feladatnak?

10 pont

I. megoldás

Vegyük sorra a lehetőségeket, hogy melyik kérdésre hazudott Huncut Hugó!

Ha az első kérdésre hazudott, akkor a gondolt szám páros prímszám, tehát csak a 2 lehet. Ez meg is felel a követelményeknek.

Ha a második kérdésre hazudott volna Hugó, akkor a gondolt szám olyan 1-nél nagyobb, de 3-nál nem nagyobb páratlan szám lenne, ami nem prím. Ilyen szám nincs.

Ha a harmadik kérdésre hazudott volna Hugó, akkor a gondolt szám olyan 1-nél nagyobb, de 3-nál nem nagyobb szám lenne, ami osztható 4-gyel. Ilyen szám sincs.

Ha a negyedik kérdésre hazudott Hugó, akkor 3-nál nagyobb, páros, de 4-gyel nem osztható egyjegyű számot kell keresnünk. A 6 az egyetlen ilyen szám.

A feladatnak tehát két megoldása van: vagy a 2-re vagy a 6-ra gondolt Huncut Hugó.

II. megoldás

Az alábbi táblázat összefoglaltuk, hogy az egyes lehetséges gondolt számok esetén (2-9) a kérdésekre adott válaszok közül melyik volt igaz (I) és melyik hamis (H).

	Prím? Nem	Páros? Igen	Osztható 4-gyel? Nem	Nagyobb 3-nál? Nem
2	H	I	I	I
3	H	H	I	I
4	I	I	H	H
5	H	H	I	H
6	I	I	I	H
7	H	H	I	H
8	I	I	H	H
9	I	H	I	H

A bal felső sarokban pld. azért van H, mert ha 2 lenne a gondolt szám, akkor a "Prím?" kérdésre adott "Nem" válasz hamis lenne.

Olyan számra gondolhatott Huncut Hugó, amelynek sorában pontosan egy H található.

Tehát **vagy 2 volt a gondolt szám** (és az első kérdésre hazudott), **vagy 6 volt** a gondolt szám (és az utolsóra hazudott). A feladatnak tehát ez a két megoldása van.

5. Négy testvér fáradtan ér haza. Kérik anyjukat, hogy süssön nekik palacsintát. Míg a palacsinták elkészülnek, addig a legidősebb testvéren kívül mindegyikük elalszik. Behozza anyuka a tál palacsintát. Az egyedül ébren lévő fia sajnálja felkelteni testvéreit, ezért megeszi a palacsinták negyed részét, majd lefekszik, gondolva, hogy amikor a többiek felébrednek, megeszik a részüket.

Kis idő múlva fel is kel az egyik és tudván, hogy már egy testvére evett, megeszi a megmaradt palacsinták harmadát és visszafekszik aludni. Nemsokára felébred a következő, azt gondolva, hogy ő az első, aki a legidősebb testvér után eszik, ezért megeszi a tálban most levő palacsinták harmadát, és lefeküdvé továbbalszik.

Nemsokára a harmadik is felébred az éhségtől, fel is kel. Gondolván, hogy a korábban elaludt két testvére még nem ébredt fel, megeszi az ott lévő palacsinták harmadát.

Reggel felébred mindenki, és csodálkozva látják, hogy még 8 palacsinta van a tálban, noha mindegyikük evett már. Elmondják egymásnak az este eseményeit, majd a megmaradt palacsintákat igazságosan elosztják egymás között. Így végül is mindenki ugyanannyit evett.

Hány palacsintát sütött az anya összesen?

Hogyan osztották szét a megmaradt 8 palacsintát?

10 pont

Megoldás: Jelölje x a palacsinták számát!

A legidősebb testvér megette a palacsinták negyedét. Így maradt $(3/4)x$ palacsinta.

A 2. testvér a maradék harmadát, azaz $(1/4)x$ palacsintát evett meg. Maradt a tálban $(1/2)x$ palacsinta.

A 3. ennek a harmadát ette meg, azaz $(1/6)x$ palacsintát, így maradt még $(1/3)x$ palacsinta.

Az utolsó testvér $(1/9)x$ palacsintát evett meg. A tálban maradt $(2/9)x$ palacsinta.

$(2/9)x = 8$, innen $x=36$.

Az első testvér 9 a második 9, a harmadik 6 a negyedik 4 palacsintát evett. Tehát igazságos elosztás esetén a harmadik 3, a negyedik 5 palacsintát ehetett még.

6. Bence sok kis fehér egybevágó (ugyanakkora) kockából egy nagy tömör kockát állított össze, és annak mind a 6 oldalát pirosra festette.

Huncut Hugó szétszedte a nagy kockát kis kockákra és eltette azokat a kis kockákat, melyeknek három lapja is piros volt. Bence a megmaradt kockákból egy nagy tömör téglatestet állított össze és annak mind a 6 lapját kékre festette.

Huncut Hugó a téglatestet is szétszedte kis kockákra és eltette azokat a kis kockákat, amelynek legalább az egyik oldala kék volt. Bencének így 11 kis kockája maradt.

Hány kis kockából állt Bence nagy piros kockája? Ebből hánynak volt piros lapja?

10 pont

Megoldás: Az eredeti nagy kockában 8 olyan kis kocka volt (a 8 sarokkocka), amelynek 3 oldala piros. A Bence által összeállított téglatestben azok a kis kockák, amelyeknek nincs kék oldala egy kisebb téglatestet alkotnak. Ez 11 kis kockából áll, ezért mérete csak $1 \times 1 \times 11$ lehetett. A téglatest méretei minden irányban 2 kis kockával nagyobbak, tehát $3 \times 3 \times 13$ -as lehetett. Így az eredeti nagy kockában $8 + 3 \times 3 \times 13 = 125$ kis kocka lehetett. Ennyi kis kockából valóban össze lehetett állítani egy $5 \times 5 \times 5$ -ös nagy kockát. Ha a nagy piros kockából "lehámozzuk" azokat a kis kockákat, amelyeknek van piros oldala, akkor egy $3 \times 3 \times 3$ -as kocka, azaz 27 kis kocka maradt. A "lehámozott" kis kockák száma $125 - 27 = 98$. Tehát Bence nagy kockájában 98 kis kockának volt piros oldala.