Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny
2020. január 10.

A feladatok megoldása

1. feladat: Egy diáktalálkozón 19 tanuló vett részt. A találkozót követő napokban elkezdtek egymással levelezni, mindegyikük 2 vagy 4 levelet adott fel. Lehetséges-e, hogy mindegyikük pontosan 3 levelet kapott? (6 pont)

Megoldás:

Számoljuk meg, hány levelet küldtek, és hány levelet kaptak a diákok.

Mivel mindenki páros darabszámú levelet adott fel, így az összes feladott levél száma is páros.
2 pont

Ha mindenki 3 levelet kapott volna, akkor viszont $19 \cdot 3 = 57$darab levelet küldtek volna egymásnak.
2 pont

Ugyanannyi levelet kaptak, mint ahányat küldtek; de 57 nem páros, ezért ez lehetetlen.
2 pont

Összesen: 6 pont

2. feladat: Egy hordó a 3/4 részéig van megtöltve vízzel. Beletöltünk még 3 litert, így a 4/5 részéig áll benne a víz. Hány litert kell még beletölteni a hordóba, ha azt akarjuk, hogy az 5/6 részéig legyen megtöltve? (8 pont)

Megoldás:
$4/5 - 3/4 = 1/20$,
2 pont

ezért az 1/20 rész térfogata pontosan 3 liter.
1 pont

Így a hordó $20 \cdot 3 = 60$ literes.
1 pont

$5/6 - 4/5 = 1/30$,
2 pont

vagyis az 1/30 rész a keresett mennyiség.
1 pont

Tehát $60:30=2$ liter vizet kell a hordóba tölteni.
1 pont

Összesen: 8 pont

3. feladat: Van egy 11 literes és egy 5 literes vödrünk, de más eszközünk nincs. A közelben lévő nagy tó tele van vízzel. Hogyan tudunk kimérni az egyik vödörbe pontosan 7 liter vizet? (9 pont)

Megoldás:

Telemerítjük a 11 literes vödröt.

1 pont

A 11 literes vödör tartalmából telitöltjük az 5 literes vödröt.

1 pont

Kiöntjük az 5 literes vödör tartalmát.

1 pont

A 11 literes vödör tartalmából újra telitöltjük az 5 literes vödröt.

1 pont

Megint kiöntjük az 5 literes vödör tartalmát.

1 pont

A 11 literes vödörben maradó 1 liter vizet átöntjük az 5 literes vödörbe.

1 pont

Újra telemerítjük a 11 literes vödröt.

1 pont

A 11 literes vödör tartalmából újra telitöltjük az 5 literes vödröt.

1 pont

Így a 11 literes vödörben pontosan 7 liter maradt.

1 pont

Összesen: 9 pont

4. feladat:

7 különböző színű béka nevezett be a békaügető versenyre. Lázas versengés után a 7 béka célba érkezett, holtverseny nem volt. A következőket tudjuk a végeredményről:

(a) A piros béka több békát győzött le, mint ahányan őt legyőzték.

(b) A zöld béka nem lett sem első, sem második.

(c) A zöld és a piros béka valamilyen sorrendben közvetlenül egymás után végzett.

(d) A sárga, a narancssárga és a rózsaszín béka páratlan sorszámú helyeken ért célba.

(e) A kék béka jobb helyezést ért el a zöldnél.

(f) A sárga béka nem volt benne az első háromban, és a lila békánál előrébb végzett.

(g) A narancssárga béka a célban már hűsítővel várta a rózsaszín pajtását.

Milyen sorrendben érhettek célba? (11 pont)

Megoldás:
Az (a) állításból következik, hogy a piros béka az 1-3. hely valamelyikén végzett.
1 pont
A (b) és a (c) állításból együtt következik, hogy: vagy a piros béka a 2. és a zöld a 3.; vagy a piros a 3. és a zöld a 4.
2 pont
Az eddigiekből és a (d) állításból következik, hogy a sárga, narancssárga és zöld béka valamilyen sorrendben az 1.,az 5. és a 7. helyen végeztek.
2 pont
Az eddigiekből és az (f) állításból következik, hogy a sárga béka csak az 5. lehetett. (Nem lehet az 1. és nem lehet utolsó sem, mert legyőzte a lilát.)
2 pont
A (g) állításból következik, hogy a narancssárga béka lett az első és a rózsaszín béka az utolsó.
2 pont
Az (e) állításból és a piros, illetve a zöld béka lehetséges helyzetéből következik, hogy a 2.,3. és 4. helyen sorra a kék, piros és zöld béka végzett.
1 pont

Tehát a végleges sorrend:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
narancssárga	kék	piros	zöld	sárga	lila	rózsaszín

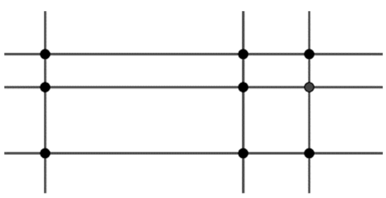
1 pont

Összesen: 11 pont

5. feladat:
a) Rajzolj fel 6 egyenest úgy, hogy összesen 9 metszéspontjuk legyen, és mindegyik egyenesre három metszéspont essen!
(5 pont)
b) Rajzolj fel 8 egyenest úgy, hogy összesen 9 metszéspontjuk legyen, és mindegyik egyenesre három metszéspont essen!
(7 pont)

Megoldás:

a) Egy lehetséges ábra:

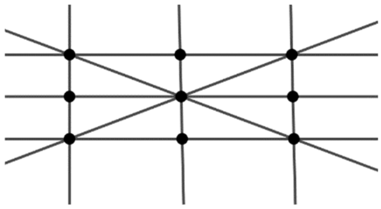


A 6 egyenesnek 9 metszéspontja van.
2 pont

Minden egyenesre 3 metszéspont esik.

3 pont

b) Egy lehetséges ábra:



A 8 egyenesnek 9 metszéspontja van.

3 pont

Minden egyenesre 3 metszéspont esik.

4 pont

Összesen: 12 pont

6. Hány olyan háromjegyű, páros szám van, amelyikben van 8-as számjegy, de nincs 4-es számjegy?

(14 pont)

Első megoldás:

Mivel a szám páros és nincs benne 4-es, ezért az utolsó számjegye csak 0, 2, 6 vagy 8 lehet.

2 pont

Ha az utolsó számjegye 0, akkor a 8
vagy az első helyen áll, ekkor a középső számjegyre 9 lehetőség van;
vagy a második helyen áll, ekkor az első számjegyre 8 lehetőség van;
viszont a 880 kétszer lett számolva, így 9+8-1=**16 lehetőség** van.

3 pont

Ha az utolsó számjegye 2, akkor a 8
vagy az első helyen áll, ekkor a középső számjegyre 9 lehetőség van;
vagy a második helyen áll, ekkor az első számjegyre 8 lehetőség van;
viszont a 882-t kétszer lett számoltik, így 9+8-1=**16 lehetőség** van.

2 pont

Ha az utolsó számjegye 6, akkor a 8
vagy az első helyen áll, ekkor a középső számjegyre 9 lehetőség van;
vagy a második helyen áll, ekkor az első számjegyre 8 lehetőség van;
viszont a 886 kétszer lett számolva, így 9+8-1=**16 lehetőség** van.

2 pont

Ha az utolsó számjegye 8, akkor az első számjegyre 8, a második számjegyre 9 lehetőség van;
így ebben az esetben összesen 8·9= **72 lehetőség** van.

3 pont

Így összesen 16+16+16+72 = **120 db** megfelelő háromjegyű szám.

2 pont

Összesen: 14 pont

Második megoldás:

A 8-as számjegyek darabszáma lehet 1; 2 vagy 3.

1 pont

Ha a számban **3 db 8-as** számjegy van: ez a 888, azaz **1 eset.**

1 pont

Ha a számban **2 db 8-as** számjegy van:
ha ez az első két helyen, ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet; azaz 3 eset

2 pont

ha az első és az utolsó helyen; ekkor a középső számjegyre 8 lehetőség van; azaz 8 eset

1 pont

ha az utolsó két helyen; ekkor az első számjegyre 7 lehetőség van; azaz 7 eset van.

1 pont

Így összesen 3+8+7= **18 eset**

1 pont

Ha a számban **1 db 8-as** számjegy van:
ha ez az első helyen; ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet;
a középső számjegyre pedig 8 lehetőség; azaz 3·8= 24 eset

1 pont

ha a középső helyen; ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet;
az első számjegyre pedig 7 lehetőség; azaz 3·7= 21 eset;

2 pont

ha az utolsó helyen; ekkor az első számjegyre 7, a második számjegyre 8 lehetőség adódik;
így ebben az esetben összesen 7·8= 56 lehetőség van.

1 pont

Így összesen 24+21+56= **101 eset**

1 pont

Így összesen 1+18+101 = **120 db** megfelelő háromjegyű szám.

2 pont

Összesen: 14 pont

Harmadik megoldás:

A 8-as számjegyek darabszáma lehet 1; 2 vagy 3. 1 pont
Ha a számban **3 db 8-as** számjegy van: ez a 888, azaz **1 eset.** 1 pont

Ha a számban **2 db 8-as** számjegy van:
ha ez az első két helyen, ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet; azaz 3 eset 2 pont
ha az első és az utolsó helyen; ekkor a középső számjegyre 8 lehetőség van; azaz 8 eset 1 pont
ha az utolsó két helyen; ekkor az első számjegyre 7 lehetőség van; azaz 7 eset van. 1 pont

Így összesen 3+8+7= **18 eset** 1 pont

Ha a számban **1 db 8-as** számjegy van:
ha ez az első helyen; ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet;
a középső számjegyre pedig 8 lehetőség; azaz $3 \cdot 8 = 24$ eset 1 pont
ha a középső helyen; ekkor az utolsó számjegy csak a 0; 2 vagy a 6 lehet;
az első számjegyre pedig 7 lehetőség; azaz $3 \cdot 7 = 21$ eset; 2 pont
ha az utolsó helyen; ekkor az első számjegyre 7, a második számjegyre 8 lehetőség adódik;
így ebben az esetben összesen $7 \cdot 8 = 56$ lehetőség van. 1 pont
Így összesen 24+21+56= **101 eset** 1 pont

Így összesen 1+18+101 = **120 db** megfelelő háromjegyű szám. 2 pont

Összesen: 14 pont